陈庆益　编著

流形、分布与拟微分算子



华中工学院出版社

流形、分布与拟微分算子

陈庆益　编著

華中工學院 出版社

内 容 提 要

本书介绍近年来在数学多个分支及物理学、技术科学中应用十分广泛的流形、分布与拟微分算子.

书中有关局部凸空间的泛函分析及广义函数的乘法问题、除法问题，是国内及国际现有书籍中较少讨论的.

本书可作为高等学校高年级学生与研究生选修课教材及物理工作者与工程技术人员的参考书.

流形、分布与拟微分算子

陈庆益 编著

责任编辑 李立鹏

华中工学院出版社出版

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所发行

华中工学院出版社沔阳印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：9.875 字数：2[illegible]4,000

1985年8月第1版，1985年8月第1次印刷

印数：1—2,000

统一书号：13255—032 定价：2.30元

序

编著者于1957年下半年及1963年至1965年曾多次讲授“局部凸空间与广义函数”课；1978年后，对原有讲义增加有关大范围分析及拟微分算子的内容，又多次为研究生讲授。本书就是在这个基础上写出的。

广义函数（包括Schwartz的分布）已在数学的多个分支及物理学、技术科学中得到广泛应用；考虑到近年来大范围分析（流形上的分析）及拟微分算子的重要性，所以本书把它们与分布理论结合起来加以介绍。事实上，流形上的分布已有所应用，而拟微分算子及Fourier积分算子则是分布理论的发展，三者之间是有所联系的。

本书只有三章。

第一章首先讲述拓扑空间，给出以后讨论所必要的准备知识；接着介绍拓扑线性空间特别是局部凸空间上的泛函分析，这方面的内容在国内现有书籍中还较少讨论；最后论述流形上有关微分运算的一些重要性质，例如浸入、浸盖及贯截等，部分内容属于微分拓扑的范围。流形上的积分则放在第二章，以便引出流形上的分布定义。鉴于Stokes公式在两本译书（Spivak的《流形上的微积分》及Goffman的《多元微积分》）中已有详细论述，所以本书未作介绍。

第二章从理论性较强的局部凸空间的角度处理广义函数，以便深入揭示广义函数的本质。本章还专门讨论了广义函数的乘法问题及除法问题，这些在国际现有书籍中都是讨论得不多的，只散见于期刊文章中。

第三章从Euclid空间的Fourier积分算子（局部理论；区

别于流形上的Fourier 积分算子理论，所谓的全局理论）的角度介绍了拟微分算子。它是近年来用以讨论一般偏微分方程的有力工具，并在其它方面也得到应用。

编著者谨向罗学波同志表示谢意，他结合近几年的教学实践，写出了第三章的修订稿，在阐述和证明方面作了许多补充，使第三章更便于阅读。

陈庆益

1983年10月

目　　录

1. 拓扑空间及流形

可微流形理论在近代全局分析中起重要作用。本章的重点是介绍流形及向量丛，为此先提及一般拓扑的某些基本概念。本章的另一重点是局部凸空间及其上的泛函分析。

1.1 一般拓扑

1.1.1 拓扑结构

一定元素的集合$E=\{x,y,\cdots\}$称为**抽象空间**，而元素$x,y,\cdots$则称为E中的点。

为了在E中建立极限、收敛、连续等分析概念，需引进拓扑结构。

定义1 若E中某子集类$\mathscr{O}$具下述性质（所谓**开集公理**）：

O_1 E及空集$\varnothing$属于$\mathscr{O}$；

O_2 $\mathscr{O}$中有限个集的交仍属于$\mathscr{O}$；

O_3 $\mathscr{O}$中任意个集的并仍属于$\mathscr{O}$，

则称$\mathscr{O}$作成E的**拓扑结构**（简称**拓扑**）T，称E为**拓扑空间**，记为$E(T)$，或简记作E；$\mathscr{O}$中集称为E的**开集**。开集A的余集（或补集）$CA\equiv E\setminus A$称为E的**闭集**。

可核验E中所有闭集的类$\mathscr{F}$具性质(所谓**闭集公理**)：

F_1 E及空集$\varnothing$属于$\mathscr{F}$；

F_2 $\mathscr{F}$中任意个集的交仍属于$\mathscr{F}$；

F_3　$\mathscr{F}$中有限个集的并仍属于$\mathscr{F}$.

E上拓扑结构也可用具性质F_1—F_3的类$\mathscr{F}$定义；这时E中开集则定义为$\mathscr{F}$中集(闭集)的余集。

对同一抽象空间E可引进多种拓扑.作为两种极端情形,可取E及空集构成开集类$\mathscr{O}$，或取E的所有子集(包括空集及E)构成开集类$\mathscr{O}$。容易看出，开集公理在这两种情形都成立。这时相应的拓扑结构分别称为**平凡拓扑**及**离散拓扑**。

定义2　E上二拓扑T_1及T_2若有如下关系：T_1开集类$\mathscr{O}_1$包含T_2开集类$\mathscr{O}_2$，即$\mathscr{O}_2$中子集都是$\mathscr{O}_1$中子集，则称T_1**细于(或强于)**T_2，T_2**粗于(或弱于)**T_1；若T_1同时细于及粗于T_2，则称T_1及T_2为**等价的或重合的**拓扑。

据定义2知，E上最强拓扑为离散拓扑，最弱拓扑为平凡拓扑。可注意，E上任二拓扑不一定能比较强弱。

定义3　若拓扑空间$E(T)$的集U以含某点$x\in E$的开集为子集，即称U为点x的**T邻域**，或简称**邻域**。

若记点x的所有邻域组成的集合为$v(x)$，不难核验它具备如下性质(所谓**邻域公理**)：

V_1　$v(x)$不是空集，且x含于$v(x)$的每个集；

V_2　含$v(x)$中某个集的每个集，属于$v(x)$；

V_3　$v(x)$中有限个集的交，仍属于$v(x)$；

V_4　对每个$U\in v(x)$，存在$V\in v(x)$，使对每一点$y\in V$，有$U\in v(y)$。

可注意，每一含于U的开邻域V，都具有性质V_4。

E上拓扑也可由E中所有点的邻域类的全体确定。事实上，设对E中每一点x已给定满足邻域公理的非空子集类$v(x)$，于是可定义开集O为具备如下性质的集：

$$x\in O\Rightarrow O\in v(x). \tag{1}$$

这样的子集类添加空集作成子集类$\mathscr{O}$。容易核验$\mathscr{O}$满足开集公理，故作成的是一种拓扑结构T。但还须证明：由这个拓扑T产生的新邻域类重合于原邻域类$\{v(x);x\in E\}$。首先，由定义3知，x的每个T邻域含一开集O，且$O\in v(x)$。故由性质V_2知，x的每个T邻域属于$v(x)$。反过来，对给定的$U\in v(x)$，作集$U_1=\{y:U\in v(y)\}$。因$x\in U_1$，只需证$U_1\in\mathscr{O}$。据性质V_4知，对点y存在$V\in v(y)$，使对所有$z\in V$，恒有$U\in v(z)$。由U_1的定义知$z\in U_1$，于是$V\subset U_1$，而据性质V_2知$U_1\in v(y)$。这表明U_1具性质(1)：由$y\in U_1$，恒有$U_1\in v(y)$。故$U_1\in\mathscr{O}$。注意到$U_1\subset U$，即知U也是T邻域。因此，两种邻域类重合一致。

以后常会讨论拓扑空间的子空间，因此需讲到拓扑的相对化原则。

设S为$E(T)$的子集。把E中开集类$\mathscr{O}=\{O\}$相对化，而取$\{S\cap O\}$作为S中的开集类，可得拓扑T在S上的**导拓扑**或**相对拓扑**。同样，可由E中闭集类或邻域类进行相对化，引出S上的导拓扑。但须注意，S中开集或闭集不必是E中开集或闭集。

不难看出，对S中子集Q，由S引出的导拓扑，与直接由Q引出的导拓扑，是重合一致的。

若$E=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$，$E_j\subset E_{j+1}$，$j=1,2,\cdots$，且每个$E_j$的拓扑恰为由$E_{j+1}$引出的导拓扑，则称$E$为拓扑空间列$\{E_j\}$的**严格归纳极限**。当且仅当$U\cap E_j$为$E_j$中零元邻域时，$U$为$E$中零元邻域。

下面引进点列的收敛性及极限点概念。

定义4 若对扑拓空间$E(T)$中点列$\{x_n\}$，存在点$y\in E$具

性质：对y的任一邻域U，有相应的正数N，使当$n \geqslant N$时，总有$x_n \in U$，则称点列$\{x_n\}$收敛于点y(关于拓扑T)，或称y为此点列的一个极限点。

若考虑一点x的所有邻域，不免过于庞杂，因此须挑出一些基本的邻域。这就引出如下的定义。

定义5 拓扑空间E在点x的所有邻域的类$v(x)$的子类$u(x)$中，若使$v(x)$中每一邻域必含$u(x)$中一邻域，则$u(x)$称为x的**邻域基**。E中所有点的邻域基的全体$u=\{u(x):x \in E\}$称为**E的邻域基或基本邻域系**。

于是可提到如下的可列公理。

第一可列公理 E中每点有可列的邻域基，即x的邻域基由可列个邻域组成。

可注意，在具第一可列性的空间，收敛性可用序列表述：从可列个邻域可选出点列。

第二可列公理 E本身有可列的邻域基。

例如，n维 Euclid 空间R^n满足第二可列公理：以有理点为心、$\frac{1}{k}(k=1,2,\cdots)$为半径的开球列，就组成$R^n$的可列的邻域基。

特别，对由开集组成的邻域基$u(x)$，据邻域公理V_1—V_4及上面的讨论，可核验下面的Hausdorff公理成立：

H_1 每点x至少有一邻域属于$u(x)$，且x含于$u(x)$的每个元中；

H_2 $u(x)$中二元的交含有$u(x)$中某元；

H_3 若点y含于$V \in u(x)$，则有$W \in u(y)$，使$W \subset V$。

反过来，由具性质H_1—H_3的邻域基u也可确定E上拓扑结构，这时只需对u添加E中较大子集，使作成具性质V_1—V_4

的邻域类即可。

若二邻域基u及u'确定E上等价拓扑，即称为**等价邻域基**。由这个定义容易推出经常用到的——

Hausdorff准则 E上二邻域基u及u'等价的充要条件是：E中任一点x在u中的每个邻域，含x在u'中的某个邻域；且反之亦然。

1.1.2 分离公理

为了使拓扑空间E中的收敛性有较确定的意义，同时也为了使E中闭集具体化，还须在E中引进不同程度的分离公理。

T_0公理 E中任二不同点中，至少有一点有不含另一点的邻域。

满足T_0公理的拓扑空间称为**T_0空间**。

T_1公理 E中任二不同点，各有不含另一点的邻域。

满足T_1公理的拓扑空间称为**T_1空间**。

T_2公理 E中任二不同点有不相交的邻域。

满足T_2公理的拓扑空间称为**T_2空间或分离空间**也称为Hausdorff空间。

T_3公理 E中任一点x及不含x的任一闭集F，有不相交的邻域(任一集M的邻域定义为以含M的某开集为子集的集)。

满足T_3公理的拓扑空间称为**T_3空间**；若T_3空间还满足T_1公理，即称为正则空间。

T_4公理 E中任二不相交闭集有不相交的邻域。

满足T_4公理的拓扑空间称为**T_4空间**；若T_4空间还满足T_1公理，即称为**规范空间**。

注1 有些书分别称满足T_3或T_4公理的空间为正则空间或规范空间；若还满足T_1公理，即分别称为T_3空间或T_4空

间；而与这里的定义恰恰相反。这当然没有什么原则性的区别。本书认为：称满足 T_j 公理的空间为 T_j 空间，是更为合理的；事实上，也有一些书是这样命名的。

现在阐明 T_1 公理的意义。

定理1 拓扑空间 E 中单点集为闭集的充要条件是：E 为 T_1 空间。

证 **充分性** 设 E 为 T_1 空间。对 E 中任一点 P，记其余集为 U：$U=E\setminus\{P\}$。据 T_1 公理，对 U 中每点 Q，存在开集 $V(Q)$，使 $P\notin V(Q)$，故 $V(Q)\subset U$。于是 $U=\bigcup_{Q\in U}V(Q)$ 为 E 中开集，随之单点集 $\{P\}=E\setminus U$ 为闭集。

必要性 若 E 中单点集都是闭集，则对 E 中任二不同点 P 及 Q，记 $V_1=C\{Q\}$，$V_2=C\{P\}$。即 V_1 及 V_2 分别是 $\{Q\}$ 及 $\{P\}$ 的余集，则 V_1 及 V_2 都是开集，且 V_1 是点 P 的邻域，而不含 Q；V_2 是点 Q 的邻域，而不含 P。故 T_1 公理得到满足，于是 E 必为 T_1 空间。

为了阐明上述诸分离公理的意义及区别，下面举几个虽属人为但极有启发性的例子。

例1 设 E 仅由二点组成。定义 E 中开集类 $\mathscr{O}$ 仅含空集及 E。显然，这个拓扑空间不满足任一分离公理。

例2 **连通双点空间** E 由二点 a,b 及如下拓扑所确定：$\mathscr{O}=\{\varnothing,a,E\}$。这个子集类 $\mathscr{O}$ 显然满足开集公理。容易看出，E 为 T_0 空间，但非 T_1 空间。

例3 取线段 $0\leqslant x\leqslant 1$ 及其通常拓扑（即数轴上通常开集类确定的拓扑），再添加点 $\xi>1$，而以任一由 ξ 及 $[0,1]$ 除去有限个点组成的集作为 ξ 的邻域。可核验邻域公理 V_1—V_4 成立，且所得拓扑空间为 T_1 空间，但非 T_2 空间。

关于 T_2 空间而非 T_3 空间或正则空间，以及正则空间而非

规范空间等情况的例子．可参看有关一般拓扑的书。

为了说明T_2空间的重要意义，先作如下的考察。

设M为拓扑空间E的某子集。若点$x\in E$的每个邻域至少含M中一点，即称x为M的**触点**。M的触点的全体称为M的**闭包**，记作$\overline{M}$。容易核验闭包具性质(**闭包公理**)：

$\overline{H}_1$　$\overline{M\cup N}=\overline{M}\cup\overline{N}$；

$\overline{H}_2$　$M\subset\overline{M}$；

$\overline{H}_3$　$\overline{\overline{M}}=\overline{M}$；

$\overline{H}_4$　$\overline{\varnothing}=\varnothing$。

易知当且仅当$A=\overline{A}$时，集A为闭集。

若点$x\in E$的每个邻域至少包含M中不同于x的一个点，则称x为M的**聚点**。不难看出：当且仅当x为M的**孤立点**(即：x有一邻域，除x外不含M中其它的点)时，触点不为聚点。故集M为闭集的充要条件是：M包含它的所有聚点。

若点x随其某邻域含于M，即称x为M的**内点**；M的内点之全体称为M的**内部**，记作$\operatorname{Int}M$或$\mathring{M}$。

集M的边界∂M定义为$\overline{M}\cap\overline{CM}$，其中点称为$M$的边界点。每个闭集含其边界；每个开集不含边界点。

若$M\subset\overline{N}$，称集**N在M中稠**；若$\overline{N}=E$，称N为**处处稠集**；若$\operatorname{Int}\overline{N}=\varnothing$，称$N$为**疏集**。可列个疏集的并称为**第一纲集**；非第一纲集称为**第二纲集**。

若E中有可列的处处稠集，即称E为**可分空间**。

现在揭示T_2空间的一个性质。

定理2　T_2空间任一点的所有闭邻域的交仅含此点。

证 设x_0给定，y为不同于x_0的任一点。据T_2公理知有邻域$U(x_0)$,$V(y)$，使$U\cap V=\varnothing$，故y不为U的聚点，随之不含于$\overline{U}$，故定理的断定是正确的。

由定理2特别得知T_2空间的单点集也是闭集。故对T_2空间不必附加T_1公理；而对T_3或T_4空间，则有此必要。

据上所述，知T_2空间的闭集、开集，与R^n中的点集论更为接近。

推论1 有限集上唯一的T_2拓扑（即具T_2公理的拓扑结构）是离散拓扑。

1.1.3 连续映射

设A是由拓扑空间E_1到E_2的**映射**，对每点$x\in E_1$，有点$Ax\in E_2$与之相对应。有时也称A为以E_1作定义域而值域属于E_2的**抽象函数**。映射也称为**变换**或**算子**，映射A也作成E_1中子集S到E_2的映射，而称为A在S上的缩射，记作$A|_S$，也简记作A。同样，A还作成E_1中子集类到E_2中子集类的映射，仍记作A；这时称$AM\subset E_2$为$M\subset E_1$的**象集**或**象**，M则称为AM的**原象**，特别，AE_1称为E_1在映射A下的**象空间**或**值域**。

E_1到E_2中的一对一映射，称为**单射**或**内射**；E_1到E_2上的映射，称为**满射**或**盖射**；内射而兼盖射，称为**双射**。

若A为内射，记$y=Ax$，则由对应$x=A^{-1}y$得AE_1到E_1上的映射A^{-1}，称为A的**逆映射**，或简称为A的**逆**。若A不是内射，则不存在点与点间的逆映射，但可取AE_1中每个子集N的原象$A^{-1}N$与N对应，这里$A^{-1}N=\{x: Ax\in N, x\in E_1\}$。故对任一映射$A$，可定义$A^{-1}$为由$AE_1$中子集类到$E_1$中子集类的映射。若$N$为$E_2$中任一子集，只要$AE_1\cap N\neq\varnothing$，可理解$A^{-1}N=A^{-1}(N\cap AE_1)$。

定义6 若A映E_1中开集为E_2中开集，即称A为**开映射**；**闭映射**可类似地定义。对A^{-1}也可引进同样定义。

映射A若在点$x_0\in E_1$具性质：对Ax_0的每个邻域$V\subset E_2$，存在x_0的相应邻域$U\subset E_1$，使得$AU\subset V$，即称映射A**在点x_0连续**。若A在E_1中所有的点连续，则称A**在E_1上为连续映射**，或简称A为**连续映射**。

现在可叙述一个基本定理。

定理3 E_1到E_2的映射A的下列性质是等价的：

1) A为连续映射；

2) A^{-1}为开映射；

3) A^{-1}为闭映射。

证 若A^{-1}为开映射，则对Ax_0的每个开邻域V，得x_0的开邻域$U=A^{-1}V$，使$AU\subset V$，故A在x_0连续。因x_0为E_1中任一点，故A在E_1上连续。

反之，若A连续且M为AE_1中开集，则对$Ax_0\in M$，存在Ax_0的邻域$V\subset M$。由连续性知存在x_0的邻域$U\subset A^{-1}M$，故x_0为$A^{-1}M$的内点。但x_0可取为$A^{-1}M$中任一点，故$A^{-1}M$为E_1中开集，随之A^{-1}为开映射。

最后，因A^{-1}把$AE_1\setminus M$映为$E_1\setminus A^{-1}M$，故A^{-1}当且仅当它为闭映射时为开映射。定理证毕。

注意当连续映射A为内射时，A^{-1}不必连续。若连续映射A的逆A^{-1}也连续，即称A为**同胚映射**或简称**同胚**；这时空间E_1及AE_1称为**同胚的**。

1.1.4 连通性与紧性

拓扑空间E若不为二非空的不相交开集的并，即称为**连通空间**。等价的定义是：E不为二非空的不相交闭集的并，或E

不含同时为开及闭的真子集。

E的子集S若在导拓扑下为连通空间，即称为E的**连通子集**。若E中任二点都属于同一连通子集，则E为连通空间。

E的非空连通子集S若具性质：含S的唯一连通集是S本身，则称S为E的一个**分集**。

若E的每一点都有一个连通邻域，即称E为**局部连通的**。可核验，局部连通空间在开连续映射下的象集也是局部连通的。在局部连通空间，各个分集同时为开及闭的。

定理4 设E为连通空间，f为由E到实数域R中的连续函数，则f取到任二不同值$f(x)$及$f(y)$间的每个值。

证 不妨设$f(x)<f(y)$。若f不取值$a\in(f(x),f(y))$，记$U=\{x_0:f(x_0)<a\}$，$V=\{y_0:f(y_0)>a\}$，则E至少有两个不相交的分集U及V，而与E的连通性假定不符。故定理真。

设$c(t)$为由$[0,1]$到拓扑空间E的连续映射。若$c(0)=c(1)=x\in E$，则称$c(t)$为E中过点x的**圈**。若存在连续映射$H(t,\tau)$，$0\leqslant t,\tau\leqslant 1$，使对所有的$t\in[0,1]$，有$H(t,0)=c(t)$，$H(t,1)=x$，则称圈$c(t)$为**可缩的**。若拓扑空间$E$中过任一点的任一个圈都是可缩的，则称$E$为**单连通空间**。

连通性是拓扑空间的同胚不变性质，即在同胚映射下，连通性不被破坏。拓扑空间的另一重要同胚不变性质是紧性。

拓扑空间E中的开集族$\{U_\alpha\}$，若具性质：$\bigcup\limits_{\alpha}U_\alpha=E$，即称为$E$的一个开**覆盖(族)**。若对$E$的每个开覆盖可选出有限的子覆盖$\sum\limits_{j=1}^{N}U_{\alpha_j}=E$，则称$E$为**紧空间**。$E$的子集$S$若在导拓扑下为紧空间，即称为$E$的紧子集；若$S$有紧的闭包，则称$S$

为**相对紧集**。若E中每点有邻域，其闭包为紧集，则称E为**局部紧的**。若E中每个点列有收敛于E中一点的子列，则称E为**列紧的**。

紧空间必为局部紧的，反之则不然。例如R^n为局部紧的，而非紧空间。

若对每个U_α，存在V_β，使$U_\alpha \subset V_\beta$，则E的覆盖$\{U_\alpha\}$称为覆盖$\{V_\alpha\}$的**加细**。若E中每点x有邻域U，只与有限个U_α相交，则E的覆盖$\{U_\alpha\}$称为**局部有限的**。若E的每个开覆盖有局部有限的加细开覆盖，则称E为**次紧的**。

定理5 设E为具第一可列性的紧空间，则E中任一点列$\{x_n\}$有收敛的子列。

证 用反证法。可设所有的x_n各不相同。因列$\{x_n\}$无收敛的子列，则每点x_n有邻域U_n，不含其它点x_m，$m \neq n$。因E满足第一可列公理，收敛性可用序列收敛性表述。但因$\{x_n\}$无收敛子列，故$\{x_n\}$除每点x_n外，无其它触点，即$\overline{\{x_n\}} = \{x_n\}$，这表明$\{x_n\}$为闭集。于是得$E$的开覆盖$\{U_n\}$及$C\{x_n\}$，而无有限的子覆盖。这与紧性假定不符，故定理成立。

定理6 T_2空间E的每个紧集S为闭集。

证 设$x \in CS$，$y \in S$，则x, y有不相交的邻域。因S为紧集，x与S有不相交的邻域。事实上，S可由有限个开集所覆盖，而据定理2，x的所有闭邻域的交只含点x，故x有邻域，不与覆盖S的有限个开集相交。这表明x有邻域属于CS，而为CS的内点。但因x为CS中任一点，故CS为开集，随之其余集S为闭集。

定义7 若局部紧空间E为可列个紧集的并，即称E**在无限远处为可列的**。

注2 次紧空间必为规范空间。局部紧空间为次紧空间的

充要条件是：它是在无限远处可列的局部紧空间族的并（见 Bourbaki, *Topologie Générale Chap. I*, §10.12, Theorem 5. Act. Sci. et Ind No. 1144, Paris(1947)）.

1.1.5 其它拓扑概念

设给定集$E_1, \cdots, E_n$. 用E记所有n重点$x=(x_1, \cdots, x_n)$的集，其中$x_j \in E_j$，$j=1, \cdots, n$，或记$E=\prod_{j=1}^{n} E_j$，而称为集E_j的集积或Descartes积。若E_j都是拓扑空间，则E也是拓扑空间，而以$U(x)=\prod_{j=1}^{n} U_j(x_j)$作为点$x$的邻域基，这里$U_j(x_j)$是点$x_j$在$E_j$中的任一邻域.这时称$E$为$E_1, \cdots, E_n$的**拓扑积**，仍记为$E=\prod_{j=1}^{n} E_j$. 上述定义也可用于任意个因子的情形：若给定指标集$A=\{\alpha\}$及集族$\{E_\alpha\}$，记$E=\prod_{\alpha \in A} E_\alpha$为所有的点$x=(x_1, x_2, \cdots, x_\alpha, \cdots)$的集，其中$x_\alpha \in E_\alpha$，仍称为$\{E_\alpha\}$的集积。若$E_\alpha$都是拓扑空间，则称$E$为$\{E_\alpha\}$的拓扑积，而以$U=\prod_\alpha U_\alpha(x_\alpha)$作为$x$的邻域基，这里$U_\alpha(x_\alpha)$是$x_\alpha$在$E_\alpha$中的任一邻域，且除有限个$\alpha$外，$U_\alpha=E_\alpha$。若所有的$E_\alpha=E_1$，则其拓扑积可记为$E_1^A$；特别当指标集$A=\{1,2,\cdots,n\}$时，记为$E_1^n$；当$A=\{1,2,\cdots\}$时，记为$E_1^\omega$。例如当$E_1$为实数域$R$时，$R^n$为$n$维Euclid空间；$R^\omega$为所有实数列的空间；当$E_1=[0,1]$时，拓扑积$E_1^A$记为$I^A$，称为Hilbert**平行体**。

由$E=\prod_\alpha E_\alpha$的点x到点$x_\alpha \in E_\alpha$的映射P_α，称为E到E_α上的**投影**，而为连续映射。可注意，E上拓扑是使所有P_α连续的最弱拓扑，事实上，因P_α连续，故开邻域$U_\alpha(x_\alpha)$的原象$\prod_\alpha U_\alpha(x_\alpha)$为开集，因而为$x$在$E$中的邻域。因有限个开集的交才是开

集，故除有限个α外，取其余所有$U_\alpha = E_\alpha$。于是由上述原象通过有限的交运算，可得E中给定邻域基的所有邻域。若换E中拓扑为更弱拓扑时，P_α就不再是连续映射。

若f为拓扑积$E_1 \times E_2$到拓扑空间F的映射，且在点(x_1^0, x_2^0)连续，则由E_1到F的映射$x_1 \to f(x_1, x_2^0)$在点x_1^0连续；同样，映射$x_2 \to f(x_1^0, x_2)$在点x_2^0连续。这是所谓的**部分连续性**；f对x_1及x_2的同时部分连续，称为**分别连续性**。相对于这种部分或分别连续性，对(x_1^0, x_2^0)的连续性可称为**整体连续性**。在多因子的拓扑积中，类似的定义是显然的。容易看出，由整体连续性可推出部分连续性；反之不必然。

最后考虑商空间。设在集S上给定双元关系$\sim$，使对所有的点$x, y, z \in S$有：

1) 反射性 $x \sim x$；

2) 对称性 若$x \sim y$，则$y \sim x$；

3) 传递性 若$x \sim y$，$y \sim z$，则$x \sim z$，

即称$\sim$为**等价关系**。定义x的等价类$[x]$为：

$$[x] = \{y: y \sim x, y \in S\}.$$

所有等价类的集，记作$S/\sim$，称为S关于等价关系$\sim$的**商集**；而映射

$$\pi: S \to S/\sim, x \to [x],$$

则称为**典则投影**。易知S是所有等价类的并。设E为拓扑空间，$\sim$为其中某等价关系，则$E/\sim$上由开集类

$$\{U: U \subset E/\sim, \pi^{-1}(U)\text{为}E\text{中开集}\}$$

构成的拓扑，称为**商拓扑**；$E/\sim$称为**商空间**。反之，由$E/\sim$上拓扑也可引进E上拓扑：

$$\{O: O = \pi^{-1}(U), U\text{为}E/\sim\text{中开集}\}.$$

例4 考虑R^2中等价关系$\sim$：

$(a_1,a_2)\sim(b_1,b_2)$，当且仅当$a_i-b_i\in\mathbf{Z}$ $(i=1,2)$时，这里$\mathbf{Z}$为整数集。容易核验它确满足要求1)—3).记$T^2\equiv R^2/\sim$，而称为环面。

可类似地定义n维环面T^n。

关于一般拓扑，进一步可参看

L. A. Steen, J. A. Seebach, *Counterexample in Topology*, Springer-Verlag, Berlin (1970) 及陈昌平等译，一般拓扑学，1982，华东师范大学出版社。

1.2 拓扑向量空间

1.2.1 一般性质

设K为任一具零元及单元的域，例如实数域R^1及复数域C^1。K上的向量空间或线性空间E为具如下线性结构的集：

L_1 对任二点$x,y\in E$，定义有$x+y\in E$，且E关于运算$+$作成可换群；

L_2 对每个$a\in K$及$x\in E$，定义有$ax\in E$，且对任二元a，$b\in K$及$x,y\in E$，有

$$(ab)x=a(bx);\quad a(x+y)=ax+ay;\quad (a+b)x=ax+bx.$$

显然，线性空间有零元，记作0，而具性质：$x+0=0$，$a\cdot 0=0$.

若在E上还定义有分离的并与线性结构相容的拓扑T时，即称E为拓扑向量空间或拓扑线性空间。所谓拓扑结构T与线性结构相容，乃指映射

$$(x,y)\to x+y;\qquad (a,x)\to ax$$

关于拓扑T为连续映射。

由两种结构的相容性知，映射$x\to x+x_0$及$x\to ax(a\neq 0)$都是E到E的同胚映射。故若$u=\{U\}$是E中零元的邻域基，则E中任一点x的邻域基是$\{x+U\}$。因此，对于线性空间，只需对零元引进相容的拓扑，便可得到拓扑线性空间。

以后取K为实或复数域。

定理1 设$E(T)$是域K上的拓扑线性空间，$u=\{U\}$为E中零元的邻域基，则有：

TL_1 对每个$U\in u$，有$V\in u$，使$V+V\subset U$，这里$V+V=\{x+y:\ \forall x,y\in V\}$；

TL_2 对每个$U\in u$，有$V\in u$，使当$|a|\leqslant 1$时，$aV\subset U$；

TL_3 对每个$U\in u$及$x\in E$，有自然数$n_0=n_0(x,U)$，使当$n\geqslant n_0$时，$x\in nU$。

证 TL_1表明映射$(x,y)\to x+y$在点$(0,0)$的连续性。由ax在$(0,0)$的连续性知，对$\varepsilon>0$，有$W\in u$，使对所有的$x\in W$及$|a|\leqslant\varepsilon$，有$ax\in U$，故TL_2当取$V=\varepsilon W$时成立。最后，若TL_3不成立，则存在$x_0\in E$，不含于任一个nU，于是$\frac{1}{n}x_0\notin U$，而与乘积运算ax的连续性要求不符。定理证毕。

定义1 E中集M若具性质：对任一点$x\in E$，存在$\rho_0=\rho_0(x)$，使当$\rho\geqslant\rho_0$时，$x\in\rho M$，即称M为**吞吸集**。集M若具性质：对每点$x\in M$，当$|a|\leqslant 1$时，总有$ax\in M$，即称M为**心实称集**。集$\widehat{M}=\{ax:\ |a|\leqslant 1,\ x\in M\}$称为$M$的**心实称包**。

推论1 每个拓扑向量空间总有由心实称的吞吸集作成的零元邻域基。

事实上，TL_3表明零元邻域为吞吸集；而由TL_2知$\bigcup\limits_{|a|\leqslant 1}aU\ (U\in u)$为心实称的。

定理2 设线性空间E有子集类$u=\{U\}$，具性质TL_1—TL_3及1.1.1性质H_1—H_2，且$\bigcap U=\{0\}$，则由邻域基

$$\{U(x)=x+aU: U\in u, 0\neq a\in K\}$$

可确定拓扑T，使E成为拓扑线性空间。

证 在E中定义开集为对其中每点x含其一邻域$U(x)=x+aL$的集，添上空集，作成类$\mathscr{O}$。易核验$\mathscr{O}$满足开集公理的要求，故得拓扑T。为核验T_2公理，对E中任二不同点x及y，因$\bigcap U=\{0\}$，知有$U\in u$，使$x-y\notin U$。取V为心实称集，使$V+V\subset U$，则$(x+V)\cap(y+V)=\varnothing$。因若不然，则有$z_1$，$z_2\in V$，使$x+z_1=y+z_2$，随之$x-y=z_2-z_1\in V+(-V)=V+V\subset U$，而得矛盾。映射$(x,y)\to x+y$在点$(x_0,y_0)$的连续性由$(x_0+V)+(y_0+V)\subset x_0+y_0+U$推出；映射$(a,x)\to ax$在点$(a_0,x_0)$的连续性可如下核验：取心实称邻域$U\in u$，作$a_0x_0+U$，设$|a_0|\leqslant m$，作心实称集$V$，使$mV+V+V\subset U$。据$TL_3$，存在$n_0$，使当$n\geqslant n_0$时，有$x_0\in nV$。若$|a-a_0|\leqslant\frac{1}{n}$，$x\in x_0+V$，则由

$$ax=a_0x_0+(a-a_0)x_0+(a-a_0)(x-x_0)+a_0(x-x_0),$$

$$\frac{1}{n}(nV)=V, \qquad (a-a_0)(x-x_0)\in\frac{1}{n}V\subset V$$

以及$a_0(x-x_0)\in mV$有

$$ax\in a_0x_0+V+V+mV\subset a_0x_0+U,$$

于是定理得证。

1.2.2 局部凸空间

下面引进一类重要的拓扑线性空间。

定义2 拓扑线性空间E若有由凸集组成的零元邻域基，

即称为**局部凸空间**；相应拓扑结构称为**局部凸拓扑**。

回忆凸集的定义：若由$x, y\in M$，$a, b\geqslant 0$，$a+b=1$，恒有$ax+by\in M$，则称M为凸集。若不限定a，b为非负数，甚至容许为复数，则当$|a|+|b|=1$时，对$x, y\in M$，总使$ax+by\in M$，即称M为**绝对凸集**。对任何集$N\in E$，含N的所有凸集的交称为N的**凸包**，记作$C(N)$。可类似地定义N的**绝对凸包**。

易知任一零元邻域U_α总含有绝对凸的零元邻域。故由推论1知，局部凸空间有由绝对凸集组成的零元邻域基。

定理3 设在线性空间E中存在具1.1.1性质$H_1—H_2$的吞吸的绝对凸集类$u=\{U_\alpha\}$，$\bigcap_\alpha U_\alpha=\{0\}$，且对$\rho>0$有$\rho U_\alpha\in u$，则以$u$为零元邻域基，可得局部凸空间$E(T)$；且每个局部凸空间可如此得到。

这是定理2的直接推论。因由绝对凸性有

$$\frac{1}{2}U_\alpha+\frac{1}{2}U_\alpha\subset U_\alpha,$$

故取$V=\frac{1}{2}U_\alpha$，即知TL_1成立。其它更易核验。据定理2后的讨论，知每个局部凸空间确可如此得到。

实际应用时，常借所谓半范列来定义局部凸空间。

定义3 线性空间E上的实函数$p(x)$若具性质：

N_1 $p(x)\geqslant 0$，$p(0)=0$，$x\in E$；

N_2 $p(ax)=|a|p(x)$，$x\in E$，$a\in K$；

N_3 $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$，$x, y\in E$，

即称为E上**半范**。若还具性质：

N_4 $p(x)=0\Longleftrightarrow x=0$，

则称$p(x)$为**范**，记作$\|x\|=p(x)$。

通常称N_3为三角不等式(关于半范的)。

设在线性空间E中给定绝对凸吞吸集C，定义函数

$$p(x)=\inf_{x\in\rho C}\rho, \qquad (1)$$

容易核验$p(x)$为半范。事实上，由C的吞吸性知$p(x)$对所有的$x\in E$有定义，且性质N_1是显然的。为核验N_2，注意

$$p(ax)=\inf_{ax\in\rho C}\rho=|a|\inf_{x\in\frac{\rho}{|a|}C}\frac{\rho}{|a|}=|a|\inf_{x\in\lambda C}\lambda=|a|p(x).$$

为核验N_3，记$p(x)=\rho_0$，$p(y)=\sigma_0$，则当$\rho>\rho_0$，$\sigma>\sigma_0$时，$\frac{x}{\rho}$及$\frac{y}{\sigma}$都属C。由C的凸性知

$$\frac{\rho}{\rho+\sigma}\cdot\frac{x}{\rho}+\frac{\sigma}{\rho+\sigma}\cdot\frac{y}{\sigma}=\frac{x+y}{\rho+\sigma}\in C,$$

故$x+y\in(\rho+\sigma)C$。由ρ及σ的任意性知有

$$p(x+y)\leqslant\rho_0+\sigma_0=p(x)+p(y).$$

反之，由给定半范$p(x)$，也可得绝对凸吞吸集

$$C=\{x: p(x)<1,\ x\in E\}. \qquad (2)$$

事实上，吞吸性由N_2保证：对E中任一点y，记$p(y)=\rho_0$，取$\rho=\rho_0+\varepsilon$，$\varepsilon>0$且充分小，则有$p\left(\frac{y}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho}p(y)<1$，故$\frac{y}{\rho}\in C$，或$y\in\rho C$，$\forall\rho>\rho_0$。这表明$C$为吞吸集。$C$的绝对凸性更易核验：对$C$中任二点$x,y$及任二数$a,b\in K$，只要$|a|+|b|=1$，据$N_3$及$N_2$有

$$\begin{aligned}p(ax+by)&\leqslant p(ax)+p(by)\\&=|a|p(x)+|b|p(y)<|a|+|b|=1.\end{aligned}$$

这表明$ax+by\in C$。故C为绝对凸的。

可注意，由N_3容易推出

$$|p(x)-p(y)|\leqslant p(x-y). \qquad (3)$$

事实上，

$$p(x)=p(x-y+y)\leqslant p(x-y)+p(y),$$

于是

$$p(x)-p(y)\leqslant p(x-y).$$

交换x及y的地位，同样可得(由N_2知$p(-x)=p(x)$)

$$p(y)-p(x)\leqslant p(x-y).$$

结合上面两个不等式，即得(3)式．由(3)式可看出：若$p(x)$在点$x=0$连续，则处处连续，且为一致连续，即，对任意的$\varepsilon>0$，存在零元邻域U，只要$x-y\in U$，就有$|p(x)-p(y)|<\varepsilon$.

定理4 设在线性空间E上给定半范族$\{p_\alpha(x)\}$，使对每点$x_0\neq 0$，至少有某半范$p_\alpha(x_0)\neq 0$。记$U_\alpha=\{x:\ p_\alpha(x)<1,\ x\in E\}$，则由$U_\alpha$的有限交$U=\bigcap\limits_{j=1}^{n}U_{\alpha_j}$ (n为任意的有限正整数)的倍集族$\{\rho U\}$作成的零元邻域基，使E成为局部凸空间；且每个局部凸空间可如此构成。

证 注意集$\rho U=\rho\bigcap\limits_{j=1}^{n}U_{\alpha_j}$可由不等式

$$p(x)<\rho,\qquad p(x)=\sup_j p_{\alpha_j}(x)$$

给定。易知$\{\rho U\}$为绝对凸吞吸集族且作成零元邻域基。因对任一点$x_0\neq 0$总有某$p_\alpha(x_0)\neq 0$，故有$\rho\neq 0$使$p_\alpha(\rho x_0)>1$，即ρU不含x_0，随之确有$\bigcap\limits_{\rho}\rho U=\{0\}$。于是据定理3知$E(T)$成为局部凸空间。反之，由定理3确定的局部凸拓扑可由半范族给出，这时只需取p_α为对应于U_α的半范即可。定理证毕。

1.2.3 F空间

局部凸空间最简单的例是赋范空间，它的拓扑由一个范给定：

$$U_\varepsilon=\{x;\ \|x\|<\varepsilon\}.$$

容易由N_1—N_4核验U_ε为绝对凸的吞吸集，且零元有可列的邻域基。其次是局部凸的**距离空间或度量空间**注意一般的度量空间不必是局部凸的，见1.3.2的例1。

在度量空间E，对任二点x,y，定义有满足如下要求的**距离或度量**$\rho(x,y)$：

D_1 $\rho(x,y)\geqslant 0$, $\rho(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$;

D_2 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$, $\forall x,y\in E$;

D_3 $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$, $\forall x,y,z\in E$.

这时零元邻域基由$\{U_\varepsilon\}$给定：

$$U_\varepsilon=\{x;\ \rho(x,0)<\varepsilon,\quad x\in E\},$$

但要求U_ε为凸集。取$\varepsilon=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots$,知度量空间具备第一可列性。

D_3也称为三角不等式(关于度量的)。

若空间E的拓扑结构可由引进度量而确定，即称E为**可度量化空间**。下面将看到(1.3.2.例1)，并非任一可度量化空间都是局部凸的(度量空间不必是线性空间)。

注意局部凸空间必为线性空间。

局部凸的可度量化空间可如下刻画。

定理5 可度量化局部凸空间E的拓扑可由绝对凸的零元邻域的单降列$\{U_n\}$给定：

$$U_1\supset U_2\supset\cdots,\qquad \bigcap_{n=1}^{\infty}U_n=\{0\}.$$

证 因可度量化空间具第一可列性，故E中存在可列的零元邻域基$\{V_n\}$；又因E为局部凸的，故可认为每个V_n为绝对凸集。构造列$U_1=V_1$, $U_2=V_1\cap V_2$, $\cdots$, $U_n=\bigcap_{i=1}^{n}V_i$，显然

$\{U_n\}$即为所需的单降列。条件$\bigcap U_n=\{0\}$则用以保证T_2公理成立。

定理6 局部凸空间$E(T)$可度量化的充要条件是：T由可列个半范$\{p_j(x)\}$给定，且总可假定$p_1(x)\leqslant p_2(x)\leqslant\cdots$，于是$U_j=\{x:\ p_j(x)<1\}(j=1,2,\cdots)$，即作成$E$的零元的凸邻域基。当然还须要求：对$E$中任一点$x_0\neq 0$，至少有某个$p_j(x_0)\neq 0$.

证 显然，对应于单降邻域列$U_1\supset U_2\supset\cdots$的半范列为单增的：$p_1(x)\leqslant p_2(x)\leqslant\cdots$，这里$p_j(x)$为对应于绝对凸吞吸集$U_j$的半范。反之，由任意给定的半范列$\{q_j(x)\}$，可得单增半范列

$$p_i(x)=\sup_{1\leqslant j\leqslant i} q_j(x),$$

且$\{p_j(x)\}$确定E上局部凸拓扑。至于度量，可如下引进：

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}.$$

不难核验ρ满足要求D_1—D_3，且给出T的等价拓扑。定理证毕。

由于赋范空间及可度量化局部凸空间都满足第一可列公理，故每一点可作为一定点列的极限点，且由T_2公理知此列有唯一的极限点。于是可引进下列定义。

定义4 若度量空间E中列$\{x_j\}$具性质：对任意的$\varepsilon>0$，存在正数$n_0=n_0(\varepsilon)$，使当$m,n\geqslant n_0$时，有$\rho(x_m,x_n)<\varepsilon$，即称此列为度量空间$E$的**基本列**或**Cauchy列**；若$E$中每个基本列都有极限点属于$E$，则称$E$为**完备度量空间**。完备的可度量化局部凸空间称为**Fréchet空间**或**F空间**；完备的赋范空间称为**Banach空间**或**B空间**。

定理7 每个度量空间E可在保距意义下嵌入唯一的最小完备度量空间$\widetilde{E}$，称为E的**完备化**。

注1 任二度量空间E及E'间的一对一映射$E\ni x\to x'\in E'$，若使$\rho(x,y)=\rho'(x',y')$，即称为**保距映射**。这里ρ及ρ'分别是E及E'中度量，x,y及x',y'分别是E及E'中任一对对应点。注意定理7不限于线性度量空间，而具有相当的一般性。

证 首先注意E中任二基本列$\{x_j\}$，$\{y_j\}$总使极限

$$\lim_{j\to\infty}\rho(x_j,y_j)=\rho(x,y)$$

存在。事实上，对点x_m,x_n,y_n,y_m应用D_3可得：

$$|\rho(x_m,y_m)-\rho(x_n,y_n)|\leqslant\rho(x_n,x_m)+\rho(y_n,y_m).$$

故数列$\{\rho(x_j,y_j)\}$有极限值存在，不妨记为$\rho(x,y)$，这里x，y不必是E中的点。现在证明：极限值关系$\rho(x,y)=0$：$\{x_j\}\sim\{y_j\}$，在所有基本列的类中作成一种等价关系。反射性（$\{x_j\}\sim\{x_j\}$）及对称性（$\{x_j\}\sim\{y_j\}\Rightarrow\{y_j\}\to\{x_j\}$）是显然的。只需核验传递性：$\{x_j\}\sim\{y_j\}$，$\{y_j\}\sim\{z_j\}\Rightarrow\{x_j\}\sim\{z_j\}$。但这是$D_3$的显然结果。

为简单起见，记$x=\{x_j\}$，其等价类为$\widetilde{x}$。由(3)式得知：对任何两个类$\widetilde{x}$及$\widetilde{y}$，可由极限$\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim\limits_{j\to\infty}\rho(x_j,y_j)$一对一地对应于一个实数$\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})$，且不难核验它具备性质$D_1$—$D_3$。故这些类的全体作成度量空间$\widetilde{E}$。若对$E$中点$x^0$取所有$x_j=x^0$，$j=1,2,\cdots$，即得类$\widetilde{x^0}$。故$E\subset\widetilde{E}$，且这种嵌入映射显然为保距的。又因对$\widetilde{E}$中$\widetilde{x}=\{x_j\}$，有$E$中基本列$\{x_j\}$，使$\rho(\widetilde{x},x_j)\to0$，故$E$为$\widetilde{E}$的处处稠子集。

为核验$\widetilde{E}$的完备性，取$\widetilde{E}$中基本列$\{\widetilde{x}_j\}$。对每个$\widetilde{x}_j$，有E中点a_j，使$\rho(\widetilde{x}_j, a_j)<\frac{1}{j}$。由于

$$\rho(a_m,a_n)\leqslant\rho(a_m,\widetilde{x}_m)+\rho(\widetilde{x}_m,\widetilde{x}_n)+\rho(\widetilde{x}_n,a_n),$$

知$\{a_j\}$作成E中基本列，而对应于$\widetilde{E}$中点$\widetilde{a}$；但由

$$\rho(\widetilde{a},\widetilde{x}_n)\leqslant\rho(\widetilde{a},a_n)+\rho(a_n,\widetilde{x}_n),$$

知$\widetilde{a}=\lim\widetilde{x}_n\in\widetilde{E}$。故$\widetilde{E}$为完备空间。

最后，因E在$\widetilde{E}$中稠且$\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})$由$\lim\rho(x_n,y_n)$唯一确定，而在$E$的每个扩张中为同一的，故$\widetilde{E}$属于$E$的任一扩张，而为$E$在保距意义下的唯一的最小完备空间。定理证毕。

附带提到，局部凸空间的基本列$\{x_j\}$，是关于每个半范$p_\alpha(x)$的基本列：对$\varepsilon_\alpha>0$，有$n_\alpha^0=n_\alpha^0(\varepsilon_\alpha)$，使

$$p_\alpha(x_m-x_n)<\varepsilon_\alpha,\quad\forall m,n\geqslant n_\alpha^0,\quad\alpha\in A.$$

现在介绍可列个F空间的并，所谓的**LF空间**。设给定F空间的单增列

$$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots,$$

且每个嵌入$E_j\subset E_{j+1}$保持点列$\{x_k\}$的收敛性，即若此列在E_j中收敛于零，也必在E_{j+1}中收敛于零。

记$E=\bigcup_j E_j$。它有显然的线性结构，并可引进拓扑，即1.1.1定义4前一段所述的严格归纳极限拓扑。但更方便的是如下地定义E中序列的收敛性：若点列$\{x_j\}$及点x同属于某确定的E_m(可随不同点列而异)，且按其中拓扑有$x_j\to x$，则称x_j在E中收敛于x。

注2 这种未引进拓扑结构而可赋以一定收敛性的空间，

称为**拟拓扑空间**(参看：G. Marinescu, *Espaces Pseudo-topologiques et Théorie des Distributions* VEB Verlag Berlin, 1963).

1.2.4 有界集及M空间

在一般拓扑空间，不能引进有界性概念。但在度量空间(不必为线性的)及拓扑向量空间，则可定义有界集。

定义5 拓扑向量空间$E(T)$的子集B若具性质：对每个零元邻域U，存在相应的正数$\rho=\rho(U,B)$，使$B\subset\rho U$，即称为**T有界集**；在不致引起误会的情形，简称为**有界集**。

显然，有界集的子集也有界；有限集为有界集；有界集的心实称包、闭包、凸包都有界；有限个有界集的并仍然有界。

定理8 拓扑向量空间E可赋范化(即E中拓扑可由某个范确定)的充要条件是：E有一个有界的凸零元邻域。

证 必要性 由N_1—N_4知赋范空间的集

$$U=\{x;\ \|x\|<1\}$$

为绝对凸的，且显然有界。

充分性 设V为E中有界的凸零元邻域。V含绝对凸及吞吸的零元邻域，故可认为V为绝对凸的吞吸集。定义

$$\|x\|=\inf_{x\in\rho V}\rho,$$

仿照半范定义后的讨论，知$\|x\|$具性质N_1—N_3。此外，由V的有界性知，当$\|x\|=0$时，应有$x=0$，因$0\cdot V=0$。故N_4也成立，即$\|x\|$确为范。

据此定理知，在不可赋范化的局部凸空间，不存在有界的凸零元邻域。

定理9 拓扑向量空间$E(T)$中集B有界的充要条件是：对

每个列$\{x_j\}\subset B$及列$\{a_j\}\subset K$，只要$a_j\to 0$，恒有$a_jx_j\to 0$.

证 设B有界，对任一心实称零元邻域U，有$\rho>0$，使所有的点$x_n\in\rho U$。于是$a_nx_n\in|a_n|\rho U$。取$n_0\geqslant 0$，使当$n\geqslant n_0$时，$\rho|a_n|\leqslant 1$，即有$a_nx_n\in U$。由U的任意性知确有$a_nx_n\to 0$。

反过来，用反证法。设B无界，则存在列$\{x_j\}\subset B$及心实称零元邻域U，使$x_n\notin nU$. 位于U外的列$\frac{1}{n}x_n$不可能趋于零元，故条件也是充分的。定理证毕。

对于局部凸空间，据定理4知B为有界集的充要条件是：对半范族$\{p_\alpha(x)\}$的每个半范有$p_\alpha(x)\leqslant C_\alpha$，$x\in B$。特别在可度量化情形为：

$$p_j(x)\leqslant C_j,\ x\in B,\ j=1,2,\cdots.$$

定义6 若度量空间E具性质：对任意的$\varepsilon>0$，E有由直径小于ε的集组成的有限覆盖，即称为**预紧空间**。这里定义集A的直径为$d=\sup\limits_{x,y\in A}\rho(x,y)$。$E$中子集$S$若在导拓扑下为预紧空间，即称为**预紧集**或**全有界集**。

定理10 拓扑向量空间E中的紧集、相对紧集及预紧集，都是有界集。

证 据定义6，预紧集显然有界。因相对紧集的闭包为紧集，故只需证明紧集有界。为此可证无界集A不可能为紧集。事实上，由无界性知，对给定零元邻域U，存在列$\{x_n\}\subset A$，使$y_n=\frac{1}{n}x_m\notin U$，$n=1,2,\cdots$。今证列$\{x_j\}$本身及其无界的任一子列不为紧集，故无极限点。若不然而有极限点x，取心实称零元邻域V，使$V+V\subset U$，则在x的邻域$x+V$中有足标任意大的点x_n，即$x_n-x\in V$。另一方面，列$\left\{\frac{x}{n}\right\}$趋于零元，故

对充分大的 n 有 $\frac{x}{n}\in V$。由V的心实称性知$\frac{1}{n}(x_n-x)\in V$.于是

$$\frac{x_n}{n}=\frac{1}{n}(x_n-x)+\frac{x}{n}\in V+V\subset U,$$

而与 $y_n=\frac{x_n}{n}\notin U$矛盾。故定理成立。

定义7 局部凸空间E的绝对凸、闭吞吸集称为**桶**。若E有由桶组成的零元邻域基，即称为**桶空间**。若桶空间的每个有界集为相对紧集，即称为Montel空间或**M空间**。若F空间为M空间，称为**FM空间**。

定理11 设F空间E的半范列为$p_1(x)\leqslant p_2(x)\leqslant\cdots$。若对足标$j_1<j_2<\cdots$，由按半范$p_{j_{n+1}}(x)$有界的每个集$A$，可选出按半范$p_{j_n}(x)$的基本列，则$E$为FM空间.

证 只需证E中每个有界集A为相对紧集。由A的有界性知A依每个半范有界。特别由A按p_{j_2}有界，据假定可选出按半范p_{j_1}的基本列$x_{11},x_{12},\cdots$。此列依半范p_{j_3}有界，故可选出依半范p_{j_2}的基本列$x_{21},x_{22},\cdots$。如此下去，得A中列阵：

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12}\cdots x_{1n}\cdots \\ x_{21} & x_{22}\cdots x_{2n}\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m1} & x_{m2}\cdots x_{mn}\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{matrix}$$

且第k行按半范p_{j_k}为基本列。故对角列$\{x_{jj}\}$按所有的半范的基本列，而为E中基本列。由E的完备性知此列有极限点$x_0\in E$。故A为相对紧集。定理证毕。

关于拓扑向量空间的进一步讨论，参看 Bourbaki, N., Espaces Vectoriels Topologiques, I, II, Act. Sci. et Ind. Nos. 1189, 1229, Paris, 1953, 1955. Robertson A. P and Robertson, W. Topological Vector Spaces, Cambridge Univ. Press. 1964, Kelley, J. L., *Linear Topological Spaces*, D. van Nostrand, New York. (1976).

1.3 线性映射

1.3.1 一般考察

由拓扑向量空间E到F的映射$y=L(x)$，若具性质

$$L(x_1+x_2)=L(x_1)+L(x_2), \quad \forall x_1,x_2\in E,$$

即称为**可加映射**；若具性质

$$L(ax)=aL(x), \quad \forall a\in K, \ \forall x\in E,$$

即称为**一次齐次映射**，或简称为**齐次映射**。可加齐次映射，称为**线性映射**。特别当F为实或复数域时，L相应地称为可加、齐次及线性泛函。映射E中有界集为F中有界集的映射(泛函)称为**有界映射**(泛函)。

连续映射的定义已在1.1.3中一般给出。

容易核验可加映射L具性质

$$L(0)=0; \quad L(-x)=-L(x),$$

且若L在一点(例如在点$x=0$)连续，则处处连续。事实上，

$$L(0)=L(0+0)=L(0)+L(0)=2L(0),$$

故$L(0)=0$。由此知

$$L(x-x)=L(x+(-x))=L(x)+L(-x)=L(0)=0.$$

最后，若L在$x=0$连续，则对任意的$\varepsilon>0$，有零元邻域U，使

当$x\in U$时，$|L(x)|<\varepsilon$。故对任一点$x_0\in E$，只要$x\in x_0+U$，即$x-x_0\in U$，即有

$$|L(x)-L(x_0)|=|L(x-x_0)|<\varepsilon,$$

故L在E中处处连续，且为一致连续的。

定理1 连续的线性映射必为有界映射。

证 设L为拓扑向量空间E及F之间的连续线性映射，B为E中任一有界集。若$B'=LB$为F中无界集，则存在零元邻域$V\subset F$，使集列$\frac{1}{n}B'(n=1,2,\cdots)$无一全含于$V$。故存在点列$\{x_n\}\subset B$，使$\frac{1}{n}Lx_n=\frac{1}{n}y_n\notin V$。另一方面，由$L$的连续性知有$E$中零元邻域$U$，使$LU\subset V$。但据1.2.4 定理 9 知$\frac{1}{n}x_n\to 0$，故从某个$n_0$开始，所有的$\frac{1}{n}x_n(n\geqslant n_0)$应含于此零元邻域$U\subset E$。于是应有$\frac{1}{n}y_n\in V$，所得矛盾表明$B'$应为有界集。故定理成立。

定理2 设拓扑向量空间E具第一可列性，则由E到拓扑向量空间F的任一有界线性映射L也是连续映射。

证 若L不连续，则对某零元邻域$V\subset F$及E中单降零元邻域列$\{U_i\}$，存在$x_n\in\frac{1}{n}U_n$，使$Lx_n\notin V$。但列$\{nx_n\}$为E中有界集，而列$\{y_n\}$，$y_n=nLx_n=L(nx_n)$在F中无界。所得矛盾表明定理的断言正确。

推论1 定义于满足第一可列公理的拓扑向量空间的线性映射，连续性与有界性等价。

推论2 当且仅当对F中每个半范$q_j(y)$，有E中相应半范$p_{k(j)}(x)$，使

$$\sup_{p_{k(j)}(x)\leqslant 1} q_j(Lx)<\infty \tag{1}$$

时，局部凸可度量化空间E及F间的线性映射L为连续映射。

事实上，若L连续，则对F中每个零元邻域$V=\{y; q_j(y)\leqslant\rho\}$，有$E$中相应零元邻域$U=\{x; p_{k(j)}(x)\leqslant\sigma\}$，使$LU\subset V$，即$q_j(Lx)\leqslant\rho$，故(1)式成立：

$$\sup_{p_{k(j)}(x)\leqslant 1} q_j(Lx)=\sup_{p_{k(j)}(x')\leqslant\sigma} q_j L\left(\frac{x'}{\sigma}\right)\leqslant\frac{\rho}{\sigma}<\infty.$$

这里$x'=\sigma x$，并用到半范性质N_2及L的线性。反之，对E中有界集$A=\{x; p_{k(j)}(x)\leqslant C_k, x\in E\}$，由(1)式有

$$\sup_{p_{k(j)}(x)\leqslant 1} q_j(Lx)\leqslant C_j'<\infty,$$

于是，

$$\sup_{x\in A} q_j(x)=\sup_{p_{k(j)}(x)\leqslant 1} q_j(Lx)C_k\leqslant C_kC_j'=C_j'',$$

$$j=1,2,\cdots,$$

即LA为F中有界集，故据定理2知L为连续映射。推论成立。

记$\mathscr{L}(E,F)$为局部凸可度量化空间E及F间的所有连续线性映射全体。它有自然的线性结构

$$(L_1+L_2)(x)=L_1x+L_2x,\quad L_1,L_2\in\mathscr{L},x\in E;$$
$$(\alpha L)(x)=L(\alpha x),\qquad \alpha\in K,x\in E,L\in\mathscr{L},$$

故作成向量空间。对每个$L\in\mathscr{L}(E,F)$，固定j及相应的$k(j)$，可引进$\mathscr{L}$中的半范

$$p_{j\,k(j)}(L)=\sup_{p_{k(j)}(x)\leqslant 1} q_j(Lx),$$

记对固定的关系$k(j)$使(1)式成立的$L\in\mathscr{L}$的集合为$\mathscr{L}_{k(j)}(E,$

F)。

定理3 空间$\mathscr{L}_{k(j)}(E,F)$由如下的半范列

$$p_{\bar{j},k(\bar{j})}(L)=\sup_{1\leq j\leq N}[p_{j_1,k(j_1)}(L),\cdots,p_{j_N,k(j_N)}(L)] \tag{2}$$

作成局部凸空间，这里$\bar{j}=(j_1,\cdots,j_N)$为自然数的任一有限集。由(2)式确定的拓扑称为$\mathscr{L}_{k(j)}$中的**弱拓扑**。

证 (2)式显然作成半范；且若对某$\bar{j}$有

$$p_{\bar{j},k(\bar{j})}(L)=0,$$

则对所有的j有$q_j(L)=0$，于是$Lx=0$。但x为E中任一点，故L为零映射。由此据1.2.2定理4知定理正确。

推论3 空间$\mathscr{L}(E,F)$是$\mathscr{L}_{k(j)}(E,F)$关于所有对应关系$j\to k(j)$的并：$\mathscr{L}=\bigcup_{k(j)}\mathscr{L}_{k(j)}(E,F)$.

更一般的讨论见1.2.3注2所引书。

特别当F为实或复数域时，空间$\mathscr{L}$称为E的**对偶空间**，记作E'。由推论2及3可得如下重要结果。

推论4 局部凸可度量化空间上的每个连续性泛函u乃对某固定的相应半范p_k为有界的：

$$|u(x)|<\infty,\ p_k(x)<\infty,\quad x\in E.$$

事实上，这时F中只有唯一的范$|u(x)|$。

1.3.2 连续线性泛函

先举一个例子，说明存在拓扑向量空间，其对偶空间仅含零元素；然后给出存在非零连续线性泛函的充要条件。

例1 记$L_p[a,b]$为在$[a,b]$上p次幂Lebesgue可积的函数组成的空间，这里$0<p<1$。记

$$U(\varepsilon)=\{f(x)\in L_p[a,b]:\ \|f\|_p=\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\varepsilon\},$$

$U(\varepsilon)$显然为心实称的吞吸集，且$\bigcap\limits_{\varepsilon}U(\varepsilon)=\{0\}$.为证明$\{U(\varepsilon)\}$作成邻域基，须核验：对每个$U$，有$V$，使$V+V\subset U$。为此可证：

$$\|f+g\|_p\leqslant 2^{(1-p)/p}(\|f\|_p+\|g\|_p). \qquad (3)$$

注意，当$q>1$时，函数$\dfrac{1+x^q}{(1+x)^q}(x\geqslant 0)$有一极小值$2^{1-q}$,它于$x=1$时可取到。故$1+x^q\geqslant 2^{1-q}(1+x)^q$. 从而，对$c,d>0$，取$x=\dfrac{d}{c}$有：

$$c^q+d^q\geqslant 2^{1-q}(c+d)^q,\ q>1.$$

另外，对$n>1$有$\dfrac{1+x^n}{(1+x)^n}\leqslant 1\ (x\geqslant 0)$。取$x=\left(\dfrac{d}{c}\right)^p$，$p=\dfrac{1}{n}$，得：

$$(c+d)^p\leqslant c^p+d^p,\quad 0<p<1.$$

结合上面两个不等式，并取$q=\dfrac{1}{p}$，有

$$\|f+g\|_p\leqslant\left(\int|f|^p dx+\int|g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_p+\|g\|_p),$$

故(3)式成立。由此知，对给定的U取$V=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}U$，就能使$V+V\subset U$。据1.2.1定理2知，$L_p$以$\{U(\varepsilon)\}$为邻域基作成拓扑向量空间。可注意，由(3)式可断定：$U(\varepsilon)$不是凸集。

现在设$u(f)\neq 0$为L_p上连续线性泛函，f为L_p中元。于是应存在$g_0(x)\in L_p$，使$u(g_0)\geqslant 1$。对$s\in(a,b)$，令

$$g_s^1(x)=\begin{cases} g_0(x), & a\leqslant x\leqslant s; \\ 0, & s<x; \end{cases}$$

$$g_s^2(x)=g_0(x)-g_s^1(x).$$

容易算出 $\|g_s^1(x)\|_p^p=\int_a^s|g_0(x)|^p dx$，它关于$s$由零连续增加到$\|g_0\|_p^p$，故存在$s_0\in(a,b)$，使

$$\|g_{s_0}^1(x)\|_p^p=\|g_{s_0}^2(x)\|_p^p=\frac{1}{2}\|g_0(x)\|_p^p,$$

由于$u(g_0)\geqslant 1$，对$j=1$或2，应有 $u(g_{s_0}^j)\geqslant\frac{1}{2}$。对这个$j$，令

$$g_1(x)=2g_{s_0}^j(x),$$

则有$u(g_1)\geqslant 1$。但$\|g_1\|_p=2^{1-\frac{1}{p}}\|g_0\|_p$。继续这种构造，得$L_p$中列$\{g_n(x)\}$，且具性质(注意$1-\frac{1}{p}<0$)

$$u(g_n)\geqslant 1;\quad \|g_n\|_p=2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|g_0\|_p\to 0,$$

而与u的连续性假定不符。故$L_p[a,b]$当$0<p<1$时，不存在非零的连续线性泛函。

于是出现问题：怎样的拓扑线性空间容许有非零的连续线性泛函存在？为解决这个问题，先讨论泛函的延拓问题。为简单起见，只对实值情形证明，它在复值情形仍然成立。

定理4 (Hahn-Banach延拓定理) 设在实向量空间E上给定非负的、正齐次的、次可加泛函$q(x)$，即$q(x)$具备如下性质：

$$q(x)\geqslant 0;\quad q(\alpha x)=\alpha q(x),\quad \alpha\geqslant 0;\quad \forall x\in E;$$

$$q(x+y)\leqslant q(x)+q(y),\quad \forall x,y\in E.$$

又设在E的线性子空间F在给定线性泛函$l(z)$，而具性质

$$l(z) \leqslant q(z), \quad \forall z \in F, \tag{4}$$

则$l(z)$可延拓为E上的线性泛函u，使

$$u(x) \leqslant q(x), \ \forall x \in E; \quad u(z) = l(z), \ \forall z \in F. \tag{5}$$

若E具拓扑且$q(x)$连续，则u亦连续。

证 设$l(x)$对$F_1 \supset F$已定义且(4)式在F_1上成立。对某$x_0 \notin F_1$，再延拓$l(x)$于$[x_0] \oplus F_1$，即由x_0及F_1作成线性空间

$$[x_0] \oplus F_1 = \{\alpha x_0 + z, \ \alpha \in R, \ z \in F_1\},$$

并使(4)式仍成立。为此，对F_1中任二点z及z_1，作差

$$\begin{aligned} l(z') - l(z) &= l(z' - z) \leqslant q[(x_0 + z') + (-x_0 - z)] \\ &\leqslant q(z' + x_0) + q(-x_0 - z), \end{aligned}$$

于是

$$-q(-z - x_0) - l(z) \leqslant q(x_0 + z') - l(z'), \quad \forall z, z' \in F_1,$$

因此

$$\sup_{z \in F_1} [-q(-z - x_0) - l(z)] \leqslant \inf_{z' \in F_1} [q(x_0 + z') - l(z')],$$

故存在实数r使

$$-q(-z - x_0) - l(z) \leqslant r \leqslant q(z + x_0) - l(z), \quad \forall z \in F_1. \tag{6}$$

对所有的$z \in F_1$，令

$$l(\alpha x_0 + z) = \alpha r + l(z),$$

而延拓l于$[x_0] \oplus F_1$上．今证(4)式仍成立．先设$\alpha > 0$。由(6)式的右边知

$$r \leqslant q\left(\frac{z}{\alpha} + x_0\right) - l\left(\frac{z}{\alpha}\right), \quad \frac{z}{\alpha} \in F_1.$$

以α乘上式得

$$\alpha r \leqslant q(z + \alpha x_0) - l(z).$$

这表明

$$l(z+\alpha x_0)=\alpha r+l(z)\leqslant q(z+\alpha x_0),$$

故(4)式成立。若$\alpha=-\rho<0$，则由(6)式的左边有

$$-q\left(\frac{z}{\rho}-x_0\right)+l\left(\frac{z}{\rho}\right)\leqslant r,\quad \frac{z}{\rho}\in F_1.$$

以ρ乘上式得：

$$-q(z+\alpha x_0)+l(z)\leqslant \rho r=-\alpha r,\quad \rho=-\alpha>0.$$

这表明

$$l(z+\alpha x_0)=\alpha r+l(z)\leqslant q(z+\alpha x_0),$$

故(4)式仍成立。当$\alpha=0$时，(4)式显然成立。

应用数学归纳法（当向量空间E的基底基数超过可列无限时，则应用超限归纳法），继续上述延拓过程，即得u在整个E上的存在性。若$q(x)$在点$x=0$连续，则对任意的$\varepsilon>0$，存在心实称邻域U，使对所有$x\in U$，有：

$$0<q(x)<\varepsilon.$$

于是由

$$u(x)\leqslant q(x)<\varepsilon,\qquad \forall x\in U;$$

$$-u(x)=u(-x)\leqslant q(-x)<\varepsilon,\quad \forall -x\in U,$$

知$|u(x)|<\varepsilon$，$\forall x\in U$，故u在点$x=0$并随之处处连续。定理证毕。

经常用到的不是一般形式的定理4，而是下面的特殊情形；它们对实或复空间也都是成立的。

定理5 设在向量空间E上给定半范$p(x)$，而在E的线性子空间F上给定线性泛函$l(z)$，且具性质

$$|l(z)|\leqslant p(z),\quad \forall z\in F,$$

则$l(z)$可延拓于全空间E上得线性泛函u：

$$|u(x)|\leqslant p(x),\quad \forall x\in E.$$

若E具拓扑且$p(x)$连续，则u亦连续。

事实上，半范为非负的、正齐次的、次可加泛函。

推论5 对拓扑向量空间E上每个连续半范$p(x)$，存在连续线性泛函u，使$|u(x)|\leqslant p(x)$，且对任一固定点$x_0\in E$，有$u(x_0)=p(x_0)$。

事实上，取$l(\alpha x_0)=\alpha p(x_0)$，得一维线性子空间$F=[x_0]$上的连续线性泛函$l$，再应用定理5即得$u$。

推论6 对向量空间E上每个非负的、正齐次的、次可加泛函$q(x)$及每点$x_0\in E$，有实（或复）值线性泛函u使$u(x)\leqslant q(x)$，$x\in E$，且$u(x_0)=q(x_0)$（或$\mathrm{Re}\,u(x)\leqslant q(x)$，$\mathrm{Re}\,u(x_0)=q(x_0)$）。若$E$具拓扑且$q$连续，则$u$亦连续。

事实上，只需对线性子空间$[x_0]=\{\alpha x_0: \forall\alpha\in K\}$定义$l(\alpha x_0)=\alpha q(x_0)$（或$\mathrm{Re}\,l(\alpha x_0)=\alpha q(x_0)$），再应用定理4即可。

现在可回答非零的连续线性泛函的存在性问题。

定理6 拓扑向量空间E上存在非零的连续线性泛函的充要条件是：E中有不同于E的凸零元邻域。

证 若u为E上非零连续线性泛函，则集

$$\{x: |u(x)|<1\}$$

即为不同于E的绝对凸零元邻域。反之，若U为不同于E的凸零元邻域，据1.2.2定理3前的讨论，可认为U为绝对凸吞吸集。于是半范

$$p(x)\leqslant\inf_{x\in\rho U}\rho$$

为连续函数。事实上，据p的定义知：

$$p(x)\leqslant 1,\quad \forall x\in U.$$

随之对所有$x\in\varepsilon U$，有$p(x)\leqslant\varepsilon$。故p在点$x=0$连续；由1.2.2(3)式知p处处连续。因U不同于E，存在$x_0\in E\setminus U$，使$p(x_0)>1$，故$p\neq 0$。应用推论6，即得非零连续线性泛函的存在

性。定理证毕。

由定理6可看出局部凸空间类的重要性。

1.3.3 线性及双线性映射

定理7 1) 二完备度量空间E与F间的连续线性映射A，或为拓扑同态(即A同时为开映射)，或AE为$\overline{AE}$中第一纲集；

2) 当且仅当AE为闭集时，A为拓扑同态。

证 1) 因$\overline{AE}$为完备的，且可度量化，不妨认为$\overline{AE}=F$。若AE不为第一纲集，记

$$U_\rho=\{x;\ \|x\|\leqslant\rho,\ x\in E\},$$

这里$\|x\|=\rho_E(x,0)$，ρ_E为E中度量。为证A为开映射，先证$\overline{AU_\rho}$含F中某球$V_\sigma=\{y;\ \|y\|<\sigma, y\in F\}$，这里$\|y\|=\rho_F(y,0)$，$\rho_F$为$F$中度量；再证$AU_r$当$r>\rho$时含$V_\sigma$，于是$A$映$E$中内点为$F$中内点，而为开映射。因$U_{\rho/2}$为心实称吞吸集，故有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} nU_{\rho/2}=E,$$

于是$AE=\bigcup\limits_n A(nU_{\rho/2})$。据假定，$AE$不是第一纲集，故有某个$A(nU_{\rho/2})$随之$A(U_{\rho/2})$不是第一纲集。因此$\overline{AU_{\rho/2}}$有内点，即存在$y\in AU_{\rho/2}$及零元邻域$V\subset F$，使$y+V\subset\overline{AU_{\rho/2}}$。由此得：

$$V\subset -y+\overline{AU_{\rho/2}}\subset\overline{AU_\rho}.$$

因由$U_{\rho/2}$的心实称性及A的线性易知$AU_{\rho/2}$也是心实称的，故$-y\in AU_{\rho/2}$。但V中含某球V_σ，$\sigma>0$充分小。今证当$r>\rho$时，AU_r也含V_σ。令$\rho=\rho_1$，$\sigma=\sigma_1$，取$\rho_2>\rho_3>\cdots$，使

$\sum_{j=1}^{\infty}\rho_j<r$。对应于每个$U_{\rho_n}$，有$V_{\sigma_n}$使$V_{\sigma_n}\subset \overline{AU_{\rho_n}}$，且$\sigma_n\to 0$，对任意点$y_0\in V_\sigma$，有$x_1\in U_{\rho_1}$，使$y_1=Ax_1$具备性质：$\|y_0-y_1\|<\sigma_1$。同样，因$V_{\sigma_2}\subset\overline{AU_{\rho_2}}$，有$x_2\in U_{\rho_2}$，使$y_2=Ax_2$具性质：$\|y_0-y_1-y_2\|<\sigma_2$。如此进行下去。由

$$\left\|\sum_{i=N}^{M}x_i\right\|<\rho_N+\cdots+\rho_M$$

及E的完备性，知$\sum x_i$收敛于某点$x_0\in E$，且因$\sum\rho_i<r$知$x_0\in U_r$。今

$$Ax_0=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}Ax_i=\lim\sum_{i=1}^{N}y_i=y_0,$$

故$y_0\in AU_r$。但y_0为V_σ中任一点，故$V_\sigma\subset AU_r$。于是A确为开映射。

2）若AE为闭集，则亦为完备度量空间，而不是第一纲集。事实上，若AE为可列个疏集的并：$AE=\sum_{i=1}^{\infty}M_i$，则存在球$U_1=\{y:\ \|y\|\leqslant\rho_1<1\}$，使$U_1\cap M_1=\varnothing$；同样，$U_1$中有半径不超过$\frac{1}{2}$的闭球$U_2$，使$U_2\cap M_2=\varnothing$；如此类推，列$U_1\supset U_2\supset\cdots$显然有一公共点而不属于任何一个$M_i$。这与假定$AE=\bigcup_{i=1}^{\infty}M_i$不符.故$AE$不可能为第一纲集.于是据已证得的1)，知$A$为拓扑同态。反之，若$A$为拓扑同态，则$A$也是闭映射。但$E$是完备空间，故$AE$也是完备空间，随之为闭的。定理全部得证。

作为定理 7 的应用，有如下重要结果。

定理8(闭图象定理)　当且仅当图象

$$G(A)=\{(x,Ax):\ x\in E\}$$

为$E\times F$中的闭集时，二完备度量空间E及F间的线性映射A为连续。等价的表述是：

$$x_n\to x_0,\quad Ax_n\to y_0\Rightarrow Ax_0=y_0.$$

证　若A连续，则仅当$\{x_n\}$为E中基本列时，(x_n,Ax_n)为$E\times F$中基本列。设$x_n\to x_0$，则有$Ax_n\to Ax_0$，故$(x_n,Ax_n)\to(x_0,Ax_0)$，即$G(A)$为闭集。反之，若$G(A)$为闭集，则射影$(x,Ax)\to x$为$G(A)$到E上的一对一连续映射，据定理 7 为拓扑同构。故由$x_n\to 0$有$(x_n,Ax_n)\to(0,0)$，随之$Ax_n\to 0$，即A在点$x=0$连续，于是处处连续。定理得证。

定理9　若连续线性映射A把完备度量空间E一对一地映到完备度量空间F上，则逆映射A^{-1}也是连续线性映射。

事实上，由定理 7 知A为开映射，而由一对一性知A^{-1}存在。据1.1.3定理 2 知A^{-1}为连续线性映射(A^{-1}的线性是显然的)。

下面考虑双线性映射。

定义于向量空间E_1及E_2的乘积空间$E_1\times E_2$上的抽象函数$B(x,y)$，$x\in E_1$，$y\in E_2$，若分别关于x及y都是线性的，即若

$$B(ax_1+bx_2,y)=aB(x_1,y)+bB(x_2,y);$$

$$B(x,ay_1+by_2)=aB(x,y_1)+bB(x,y_2),$$

即称为双线性映射；若B关于x为线性的，而关于y为反线性或斜线性的，即：

$$B(x,ay)=\overline{a}B(x,y),\quad \forall a\in \mathbf{C}.$$

这里$\overline{\alpha}$为α的复共轭数，则称B为斜双线性的(sesquilinear)。若E_1与E_2都有拓扑结构，且值域F也有拓扑结构，则当B关于x及y整体连续时，称B为连续的；若B分别对每个固定的x(或y)关于y(或x)连续时，即称B为分别连续的(separately continuous)。

定理10 由$E_1\times E_2$到F中的双线性映射B若在点$(0,0)$连续，则处处连续。

证 只需对任一点$(x_0,y_0)\in E_1\times E_2$改写

$$B(x,y)-B(x_0,y_0)$$
$$=B(x-x_0,y_0)+B(x_0,y-y_0)+B(x-x_0,y-y_0).$$

由于B在$(0,0)$的连续性，对F中每个零元邻域W及$W_1+W_1+W_1\subset W$，存在零元邻域$U\times V\subset E_1\times E_2$，使当$(x-x_0,y-y_0)\in U\times V$时，$B(x-x_0,y-y_0)\in W_1$；当$\frac{1}{n}x_0\in U$及$y-y_0\in\frac{1}{n}V$时，$B(x_0,y-y_0)=B\left(\frac{x_0}{n},n(y-y_0)\right)\in W_1$；当$\frac{1}{m}y_0\in V$及$x-x_0\in\frac{1}{m}U$时，$B(x-x_0y_0)\in W_1$。故当$(x-x_0,y-y_0)\in\left(\frac{1}{m}U\right)\times\left(\frac{1}{n}V\right)$时，有$B(x,y)-B(x_0,y_0)\in W_1+W_1+W_1\subset W$。定理得证。

定理11 由F空间E_1及可度量化空间E_2的积$E_1\times E_2$到可度量化空间F的分别连续的(斜)双线性映射，也是整体连续的。

证 因可度量化空间具第一可列性，故其上抽象函数的连续性可由序列连续性表述。据定理10，只需证明：对$E_1\times E_2$中每个收敛于零元的列(x_n,y_n)，在F中有

$$B(x_n, y_n) \to 0.$$

对固定的x_0，映射$B(x_0, y)$关于y连续，故对F中每个零元邻域W，有E_2中零元邻域V，使当$y_n \in V$时有

$$B(x_0, y_n) \subset W, \quad n \geqslant n_0,$$

于是

$$\bigcup_{n \geqslant n_0} B(x_0, y_n) \subset W.$$

对$n = 1, 2, \cdots, n_0 - 1$，总可取$m > 0$，使

$$\bigcup_{j=1}^{n_0 - 1} B(x_0, y_j) \subset mW,$$

故对某$\mu > 0$，有

$$C \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_0, y_n) \subset \mu W,$$

即C为有界集。对固定的y_n，把$B(x, y_n)$作为由E_1到F中的线性映射B_n。今证存在E_1中零元邻域U，使

$$\bigcup_{x \in U} B(x, y_n) \subset W.$$

这时不妨认为W是闭的心实称集。取闭的心实称零元邻域W_1，使$W_1 + W_1 \subset W$。作集

$$M = \bigcap_n B_n^{-1}(W_1),$$

由B_n的连续性，知每个$B_n^{-1}(W_1)$随之而使M为闭集，并含开子集，因E_1为完备空间. 又因对每个$x_0 \in E_1$，集$\{B_n(x_0, y_n)\}$有界，故存在$\rho > 0$，使$\rho B(x_0, y_n) \subset W_1$，即$\rho x_0 \in M$，故$M$为吞吸集。$M$显然为心实称的：由$\alpha W_1 \subset W_1$，$|\alpha| \leqslant 1$，有

$$\alpha B(x_0, y_n) = B(\alpha x_0, y_n) \subset W_1, \quad x_0 \in M, \quad |\alpha| \leqslant 1.$$

这表明$\alpha x_0 \in M$，$|\alpha| \leqslant 1$。故$M - M \equiv \{x - x'; \ x, x' \in M\}$含$E_1$中某零元邻域$U$，使

$$B(U, y_n) \subset B(M - M, y_n) \subset W_1 - W_1 \subset W,$$

于是得：

$$\bigcup_{x\in U} B(x, y_n) \subset W.$$

由此特别有

$$B(x_n, y_n) \subset W, \quad n \geq n_1,$$

这表明B在$(0,0)$为连续的。定理证毕。

进一步的讨论，除参看1.2.4结尾所附的书外，还可参考 Schaeffer, H. H., *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1970. Cristescu, R., *Topological Vector Spaces*, Noordhoff, Leydon, 1977.

1.4 可微流形

1.4.1 范畴与函子

定义1 范畴$\mathscr{A}$是元素$\{X, Y, \cdots\}$的集，对任二元X, Y有模射的集$\mathrm{Mor}(X, Y)$，使对任三个元X, Y, Z，满足合成律

$$\mathrm{Mor}(X, Y)\,\mathrm{Mor}(Y, Z) \to \mathrm{Mor}(X, Z),$$

并服从下列公理：

Cat.1 每个$\mathrm{Mor}(X, Y)$有元id_X，在合成律下为左及右单元（恒等模射）；

Cat.2 合成律具结合性。

集$\mathrm{Mor}(X, Y)$中元称为X到Y的模射，记为$f: X \to Y$。二模射f, g的合成记作$f \circ g$或fg。

由范畴$\mathscr{A}$到$\mathscr{A}'$的函子λ：$\mathscr{A} \to \mathscr{A}'$为一映射，对$\mathscr{A}$中每元$X$有$\mathscr{A}'$中元$\lambda(X)$相应，且对$\mathscr{A}$中每个模射$f: X \to Y$，有$\mathscr{A}'$中模射$\lambda(f): \lambda(X) \to \lambda(Y)$，使当$f, g$可合成时，有

$$\begin{cases}\lambda(fg)=\lambda(f)\lambda(g);\\ \lambda(id_X)=id_{\lambda(X)},\end{cases}$$

这种函子称为**共变函子**。若λ具性质

$$\begin{cases}\lambda(f):\lambda(Y)\to\lambda(X), \quad \lambda(id_X)=id_{\lambda(X)};\\ \lambda(fg)=\lambda(g)\lambda(f),\end{cases}$$

则λ称为**反变函子**。在多元情形，可类似地定义对某些元为共变而对其余元为反变的**混合函子**。

由$\mathscr{A}$到$\mathscr{A}'$的所有同型（指纯共变、纯反变或同型混合）函子作成范畴$\mathrm{Fun}(\mathscr{A},\mathscr{A}')$，其模射常称为**自然变换**，以代替函子模射，而如下定义。设λ,μ为二共变函子，则自然变换$t:\lambda\to\mu$由模射集

$$t_X:\lambda(X)\to\mu(X), \quad \forall X\in\mathscr{A}$$

组成，并对$\mathscr{A}$中任一模射$f:X\to Y$，使图

$$\begin{array}{ccc}\lambda(X) & \xrightarrow{t_X} & \mu(X)\\ {\scriptstyle\lambda(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu(f)}\\ \lambda(Y) & \xrightarrow{t_Y} & \mu(Y)\end{array}$$

为**可换图**。所谓映射的可换图，乃指任二起止映射序列作成同一合成映射。例如上图表明：

$$t_Y\circ\lambda(f)=\mu(f)\circ t_X.$$

在任一范畴$\mathscr{A}$中，对模射$f:X\to Y$，若存在模射$g:Y\to X$，使fg及gf都是恒等模射，则称f为**同构**。例如，拓扑空间组成的范畴中的同构为拓扑同构或同胚；点集组成的范畴中的同构为双射。

设$f:X\to Y$为模射。若模射$g:Y\to X$使$fg=id_Y$，则称g为f的**截口**。注意，f的截口一般不是唯一的。

下面简单地介绍一下束的概念。束是由局部信息过渡到全局信息的机制。由于流形是局部Euclid空间的"并贴"，所以束论十分有用。

定义2 拓扑空间E到范畴$\mathscr{A}$上的**预束**$\mathscr{F}$是函子集，而具性质：

1) 对每个非空开集$U\subset E$，对应有集$\mathscr{F}(U)\in\mathscr{A}$；

2) 对E中任二开集$U,V\subset U$，有映射集(称**缩射同态**)

$$r_V^U:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V).$$

且满足要求：

a) $r_U^U=id_U$，id_U为U上恒等映射；

b) 对$U\supset V\supset W$，有$r_W^U=r_W^V\circ r_V^U$.

若$\mathscr{F}$及$\mathscr{G}$为E上预束，则**模射**$h:\mathscr{F}\leftarrow\mathscr{G}$为映射集

$$h_U:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{G}(U),$$

而对E中每个开集U，使下图为**可换图**：

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(U) & \xrightarrow{h_U} & \mathscr{G}(U) \\ {\scriptstyle r_V^U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_V^U} \\ \mathscr{F}(V) & \xrightarrow{h_V} & \mathscr{G}(V) \end{array} \qquad V\subset U.$$

若h_U为内含$\mathscr{F}(U)\subset\mathscr{G}(U)$，则称$\mathscr{F}$为$\mathscr{G}$的**子预束**。

注1 通常还要求$\mathscr{F}(U)$作成可换群，对子预束也如此(即具子群结构)，且缩射同态及模射保持代数结构(即作成同态群)，一般称$\mathscr{F}(U)$中元为$\mathscr{F}$在U上的**截口**。

定义3 预束$\mathscr{F}$称为**束**，若对E中开集U的每个开覆盖列$\{U_i\}$，$\mathscr{F}$具性质：

S_1 若$s,t\in\mathscr{F}(U)$且对所有的i，有$r_{U_i}^U(s)=r_{U_i}^U(t)$，则$s=t$；

S_2 若$s_i \in \mathscr{F}(U_i)$，且当$U_i \cap U_j \neq \varnothing$时，对所有这样的$i$及$j$有

$$r^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i) = r^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j),$$

则存在$s \in \mathscr{F}(U)$，使对所有的i，有$r^U_{U_i}(s) = s_i$.

束的模射或**束映射**是相应基底预束的模射。若束$\mathscr{F}$的子预束为束，即称为$\mathscr{F}$的**子束**。束(或预束)之间的同构由h_U的同构来定义。注意S_1表明：集U上的全局信息由其局部信息唯一确定；而S_2则表明：局部信息可结合给出全局信息。

例1 设X,Y为拓扑空间，$C_{X,Y}$为X上如下定义的预束：

1) $C_{X,Y}(U) \equiv \{f: U \to Y, f\text{连续}, U \subset X\}$；

2) 对$f \in C_{X,Y}(U)$，$r^U_V(f) \equiv f|_V$，$V \subset U \subset X$。

可核验此预束满足要求S_1及S_2，故为束。

例2 设$\mathbf{C}$为复平面，定义预束$\mathscr{B}$，使$\mathscr{B}(U)$为开集U中有界全纯函数组成的代数。记$U_i = \{z: |z| < i\}$，有$\mathbf{C} = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$。定义$f_i \in \mathscr{B}(U_i)$为：$f_i(z) = z$。由Liouville定理知不存在具性质$f|_{U_i} = f_i$的$f \in \mathscr{B}(\mathbf{C})$，故$\mathscr{B}$不为束。考察其根由，在于预束$\mathscr{B}$乃由有界性这个全局性质所定义，而不是单由局部性质所确定。

定义4 拓扑空间X的**覆盖空间**Y是如下的拓扑空间，使连续盖射$\pi: Y \to X$为局部同胚。$\pi: Y \to X$沿开集$U \subset X$的**截口**为连续映射$f: U \to Y$，使$\pi \circ f = id_U$。沿U的截口之全体记为$T(U,Y)$。

定义5 设$\mathscr{F}$为X上预束，用

$$\mathscr{F}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathscr{F}(U)$$

记$\mathscr{F}(U)$关于缩射集$\{r_V^U\}$的**直接限**（归纳限），即U取遍x的开邻域而趋于点x时所得极限.若$\mathscr{F}$的代数结构在直接限下保持，则$\mathscr{F}_x$亦具此结构，而称为$\mathscr{F}$在x的**茎**。存在自然映射

$$r_x^U:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}_x,\quad x\in U,$$

而使$\mathscr{F}(U)$中元对应于直接限中的等价类。若$s\in\mathscr{F}(U)$，则$s_x\equiv r_x^U(s)$称为s在x的芽，s则称为芽s_x的代表。

1.4.2 导射与切射

古典分析不便于直接推广到流形上。因此，先对微分运算给出新的理解。

可微函数$f:U\subset R\to R$在点$u_0\in U$的导数通常理解为f的图形在u_0的切线斜率。新的理解则把

$$Df(u_0)=f'(u_0)$$

看成作用于向量$u-u_0$的线性映射，即：$Df(u_0)$是由R到R的唯一线性映射，而使映射

$$g:U\to R;\ g(u)=f(u_0)+Df(u_0)(u-u_0)\qquad(1)$$

在点u_0与f相切。这启示我们给出如下的一般定义(为简单起见，以下只考虑有限维实向量空间，而实际对B空间及F空间都适用)。

定义6 设E及F为二有限维实向量空间。对任二映射f，$g:U\subset E\to F$，U为开集，若有

$$\lim_{u\to u_0}\frac{\|f(u)-g(u)\|}{\|u-u_0\|}=0,$$

则称f及g在$u_0\in U$**相切**，这里$\|\cdot\|$为相应空间的范或度量。

不难核验下面的定理。

定理1 设E,F如上。对于映射$f:U\to F$及点$u_0\in U$，最

多存在一个线性映射$L\in L(E,F)$，使映射

$$g_L:U\to F:\ g_L(u)=f(u_0)+L(u-u_0)$$

在u_0与f相切。这里$L(E,F)$记由E到F的线性映射的集合。

定义7 若对f存在定理1所述线性映射$L\in L(E,F)$，则称f在u_0为**可微的**，并定义$Df(u_0)=L$。若f在每点$u\in U$可微，则映射

$$Df:U\to L(E,F):\ u\to Df(u)$$

称为f的**导射**。当Df连续时*)，称f属$C^1(U)$。

例3 设$f\in C^1(U)$；$U\subset R^m\to R^n$，则Df为由R^m到R^n的线性连续映射，而可由关于R^m的标准基底

$$(1,0,\cdots,0),(0,1,0,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1)$$

的分量表出：

$$Df(u)\cdot e_j=\left(\frac{\partial f^1}{\partial x_j}(u),\cdots,\frac{\partial f^n}{\partial x_j}(u)\right),\quad j=1,\cdots,m.$$

这里$(f^1,\cdots,f^n)$为f的分量。故$Df(u)$为通常的Jacobi矩阵$\left(\frac{\partial f^k}{\partial x_j}\right)$.

定义8 设$f\in C^1(U)$。定义f的**切射**Tf如下：

$$Tf:\ U\times E\to F\times F;$$

$$(Tf)(u,e)=(f(u),Df(u)\cdot e),\quad u\in U,e\in E,\quad (2)$$

这里$Df(u)\cdot e$表示$Df(u)$作用于$e\in E$。

定理2 （合成映射的链式法则）设E,F,G为有限维实向量空间。对C^1中任二映射

$$f:U\subset E\to V\subset F;\qquad g:V\to G$$

合成映射$g\circ f:U\to G$也属C^1，且

---

*) $L=Df$作为有限维空间E上线性映射，关于e总是连续的；这里指关于u的连续性。

$$T(g\circ f)=(Tg)\circ(Tf), \tag{3}$$

即：

$$(g\circ f, D(g\circ f)(u)\cdot e)$$
$$=(g(f(u)), Dg(f(u))\cdot(Df(u)\cdot e)). \tag{4}$$

这可由定义直接导出。注意(3)式表明切射T是共变函子。

为了引进高阶导射与切射，用$\mathscr{L}^k(E,F)$记出$E\times\cdots\times E$（k重）到F的所有连续多重线性映射的集（多重线性指对每个元分别为线性的，例如双线性），用$\mathscr{L}^k_s(E,F)$记$\mathscr{L}^k$中对称元组成的子集，即对任何排列$\pi(1,\cdots,k)\equiv(\pi(1),\cdots,\pi(k))$使$f(e_1,\cdots,e_k)=f(e_{\pi(1)},\cdots,e_{\pi(k)})$的线性映射$f$的集；用$\mathscr{L}^k_a(E,F)$记斜对称元的子集，即具性质

$$f(e_1,\cdots,e_k)=(\mathrm{sgn}\,\pi)f(e_{\pi(1)},\cdots,e_{\pi(k)})$$

的线性映射f的集，这里

$$\mathrm{sgn}\,\pi=\begin{cases}1, & \text{当}\pi\text{为偶排列时；}\\ -1, & \text{当}\pi\text{为奇排列时。}\end{cases}$$

注2 代数学中已证明：任何排列可表为二指标的对换之积，例如

$$\pi(1,2,3)\equiv(2,3,1)=(1,2)(1,3),$$

这种表示不是唯一的，但因子数为偶数或奇数，则是不变的。当因子数为偶数时，相应排列称为**偶排列**；否则称为**奇排列**。

定理3 存在如下的**自然同构**：

$$\mathscr{L}(E,\mathscr{L}^k(E,F))\approx\mathscr{L}^{k+1}(E,F).$$

证 对$\varphi\in\mathscr{L}(E,\mathscr{L}^k(E,F))$，定义$\tilde{\varphi}\in\mathscr{L}^{k+1}(E,F)$如下：

$$\tilde{\varphi}(e_1,\cdots,e_{k+1})=\varphi(e_{k+1})(e_1,\cdots,e_k).$$

容易核验，对应$\varphi\to\tilde{\varphi}$为同构，即：它是双射。

同样，可等同$\mathscr{L}(R,F)$于F：对$\varphi\in\mathscr{L}(R,F)$，相应以$\varphi(1)\in F$。

但$\mathscr{L}(E,R)$与E却是对偶关系，一般不可把$E'=\mathscr{L}(E,R)$等同于E。

现在定义高阶导射。对C^1映射f：$U\subset E\to F$，有Df：$U\to\mathscr{L}(E,F)$。故可对Df递推地应用定义8，而一般地定义高阶导射$D^r f$如下。

$$D^r f=D(D^{r-1}f):\ U\subset E\to\mathscr{L}^r(E,F),\ r=2,3,\cdots.$$

据定理3，这个定义是合理的。

若$D^r f$存在且连续，则称f属于$C^r(U)$。

高阶导数与微分顺序无关的性质，引出下面的表述。

定理4 若f:$U\subset E\to F$属$C^r(U)$，则$D^r f(u)\in\mathscr{L}^r_s(E,F)$。

类似地可定义高阶切射$T^r f$。应用数学归纳法，由(3)式可得：

定理5 （C^r合成映射的链式法则）设E,F,G都是有限维实向量空间，f：$U\subset E\to V\subset F$，g：$V\to G$，$f,g\in C^r$，则$g\circ f$也属C^r，且

$$T^r(g\circ f)=(T^r g)\circ(T^r f). \tag{5}$$

注意，对于高阶导射$D^r(g\circ f)$，相应的表示要复杂得多。故切射在全局分析中比导射更为自然。

例4 不难计算

$$T^2 f:(U\times E)\times(E\times E)\to(F\times F)\times F\times F;$$

$$(u,e_1,e_2,e_3)\to(f(u),Df(u)\cdot e_1,Df(u)\cdot e_2,$$
$$D^2 f(u)(e_1,e_3)+Df(u)\cdot e_3).$$

定义9 若f：$U\subset E\to V\subset F$属C^r且为双射，同时逆映射

f^{-1}也属C^r，则称f为C^r**微分同胚**（$1\leqslant r\leqslant\infty$）.

1.4.3 流形

在给出流形的形式定义之前，先举一个例子。在R^{n+1}中考虑n维球面$S^n=\{x: \|x\|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2=1\}$。可构造$S^n$到$R^n$的局部双射，例如由南极投射到北极处超切平面上的球极射影。去掉南极P，这是$S^n\setminus P$到R^n上的局部双射。同样，由北极出发的球极射影也给出局部的双射。但不存在由S^n到R^n的单个双射。还可注意，在用分别从南极及北极出发的两个双射覆盖S^n时，这两个双射在其公共定义域存在光滑的可逆映射，即：这两个双射在公共定义域中是相容的。

于是可引出一般的定义。

定义10 集S上的**局部坐标**或**细图**（Chart），是由S上子集U到某有限维实向量空间E中开子集的双射φ，记作(U,φ). S上的**图集**（Atlas）是细图的集$\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha),\alpha\in A\}$，而具性质：

$MA1$ $S=\bigcup\limits_{\alpha}U_\alpha$；

$MA2$*) 对$\mathscr{A}$中任二细图$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，$(U_\beta,\varphi_\beta)$，只要$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，则迭合映射

$$\varphi_{\beta\alpha}=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)}: E\to E$$

为C^r（$0\leqslant r\leqslant\infty$）微分同胚。$\varphi|_V$记$\varphi$在$V$上的缩射。

若$\mathscr{A}_1\bigcup\mathscr{A}_2$仍作成图集，则二图集$\mathscr{A}_1$及$\mathscr{A}_2$称为等价的。$S$上图集的等价类称为$S$上$C^r$**可微结构**，记作$\mathscr{S}$。集$S$附以$C^r$可微结构$\mathscr{S}$称为$C^r$**可微流形**，记作$M=(S,\mathscr{S})$。通常把$M$等于基集$S$，而略去可微结构$\mathscr{S}$。

*) 这就是迭合映射的相容性要求.

注意对S未要求拓扑结构。但由流形定义，可对M或S引进拓扑。集$A\subset S$若具性质：对每点$a\in A$，有细图(U,φ)，使$a\in U\subset A$，则称A为开集。由于流形S局部微分同胚于有限维实向量空间，故S上的拓扑至少具T_2分离性及次紧性。这正是一般对可微流形所加的要求。

特别，C^0可微流形称为**拓扑流形**。

若可微流形M的每点a有细图(U,φ)，使$a\in U$且$\varphi(U)$同胚于R^n中开集，则称M为**n维流形**。

以后只考虑分离的、第二可列的n维C^∞可微流形，并简称为可微流形。

例5 一个集可有多种可微结构。例如R有不相容（因下面的$\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$在点$x=0$不可微）的细图（也是图集）

$$(U_1,\varphi_1): U_1=R,\quad \varphi_1(r)=r^3\in R;$$
$$(U_2,\varphi_2): U_2=R,\quad \varphi_2(r)=r\in R,$$

它们作成两种不等价的可微结构。但这两种结构作成的两个流形是微分同胚的，因为存在光滑双射$f:\varphi_1=\varphi_2^3$。

例6 （射影空间） 设E为有限维向量空间。结合于E的**射影空间$P(E)$**定义为集：

$$P(E)=\{E\text{中过原点的一维子空间全体}\}.$$

特别重要的是$E=R^{n+1}$及$E=C^{n+1}$的情形。现在证明$P_n(R)\equiv P(R^{n+1})$为可微流形。考虑由$R^{n+1}\setminus\{0\}$到$P_n(R)$上的投影

$$\pi(x)=\pi(x_0,\cdots,x_n)=\{(tx_0,\cdots,tx_n): t\in R^1\}.$$

注意$\pi(x)$是由点$x=(x_0,\cdots,x_n)\neq(0,\cdots0,)\in R^{n+1}$张成的一维子空间。在$P_n(R)$上引进由$\pi$导出的商拓扑，即当且仅当$\pi^{-1}(U)$为$R^{n+1}\setminus\{0\}$中开集时，$U\subset P_n(R)$为开集。于是$\pi$为连续映射，且$P_n(R)$为具可列基底的$T_2$空间。因缩射

$$\pi|_{S^n}: S^n\to P_n(R)$$

连续且为满射，故$P_n(R)$为紧空间。若$x\in R^{n+1}\setminus\{0\}$，记$\pi(x)=[x_0,\cdots,x_n]$，并称$(x_0,\cdots,x_n)$为$[x_0,\cdots,x_n]$的齐次坐标。若$(x_0',\cdots,x_n')$为$[x_0,\cdots,x_n]$的另一组齐次坐标，则因$[x_0,\cdots,x_n]$是$(x_0,\cdots,x_n)$或$(x_0',\cdots,x_n')$张成的一维子空间，故对某个$t\in R\setminus\{0\}$有$x_j=tx_j'$，$j=0,1,\cdots,n$，于是$\pi(x)=\pi(tx)$。利用齐次坐标，可如下定义$P_n(R)$上的可微结构（实际上是解析结构）：令

$$U_\alpha=\{\xi\in P_n(R):\ \xi=[x_0,\cdots,x_n],x_\alpha\neq 0\},$$
$$\alpha=0,1,\cdots,n,$$

每个U_α为开集，且$P_n(R)=\bigcup_{\alpha=0}^{n}U_\alpha$。再定义细图为：

$$h_\alpha:U_\alpha\to R^n:\ h_\alpha([x_0,\cdots,x_n])$$
$$=\left(\frac{x_0}{x_\alpha},\cdots,\frac{x_{\alpha-1}}{x_\alpha},\ \frac{x_{\alpha+1}}{x_\alpha},\cdots,\frac{x_n}{x_\alpha}\right)\in R^n$$

可核验h_α为同胚，且$h_\alpha\circ h_\beta^{-1}$为微分同胚。故得$P_n(R)$上的可微结构。

类似地可讨论任意射影空间$P(E)$。

一般，可引进集

$G_k(E)=\{E$中所有k维子空间的集$\}$，　$0<k<\dim E$，

而称为结合于E的Grassmann流形。对G_k可仿上引进可微结构，它是$k(n-k)$维紧流形，这里n是E的维数。

R^3中锥面$x_1^2+x_2^2=x_3^2$不是可微流形，甚至不是拓扑流形，因在点$(0,0,0)$近旁不存在任何细图。

设$(S_1,\mathscr{S})$及$(S_2,\mathscr{S}_2)$为任意两个流形，可构造乘积流形$(S_1\times S_2,\mathscr{S}_1\times\mathscr{S}_2)$，其可微结构由图集

$$\{(U_1\times U_2,\varphi_1\times\varphi_2):(U_i,\varphi_i)\in\mathscr{S}_i,\quad i=1,2\}$$

确定。

若M为可微流形，A为M的开子集，则M上的可微结构自然地导出A上可微结构，而称A为M的开子流形。一般地，M的子流形如下定义。

定义11 流形M的**子流形**B是M的子集而具性质：对每点$b \in B$，有M中细图(U, φ)，使$b \in U$，并具**子流形性质**：存在有限维实向量空间E及F，使

(SM) $\varphi: U \to E \times F$， $\varphi(U \cap B) = \varphi(U) \cap (E \times \{0\})$.

考虑二流形间的映射$f: M \to N$。若对每点$x \in M$及N中细图(V, ψ)而使$f(x) \in V$，总存在M中细图(U, φ)，使$x \in U$，$f(U) \subset V$，且f的**局部表示**

$$f_{\varphi\psi} \equiv \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

属C^r，则称映射f属C^r。

1.4.4 没入与浸盖

设M及N为同维流形，并给定映射$f: M \to N$. 若在点$x \in M$存在邻域，微分同胚于点$y = f(x) \in N$的某个邻域，即称f在点x为**局部微分同胚**。于是通常的反函数定理可表述如下。

反函数定理 设$f: M \to N$使切射Tf在点x为同构，则f在x为局部C^1微分同胚。

注3 流形映射f的切射Tf可用局部表示$f_{\varphi\psi}$的切射及细图的切射如下确定：

$$Tf_{\varphi\psi} = T(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) = (T\psi) \circ (Tf) \circ (T\varphi^{-1});$$

$$Tf = (T\psi)^{-1} \circ (Tf_{\varphi\psi}) \circ (T\varphi^{-1})^{-1}.$$

由于切射的同构由Jacobi行列式不为零所表征，于是引出如下概念。

当$\dim M < \dim N$即M的维数小于N的维数时，映射f在点x具最佳局部性态乃要求切射Tf在点x为内射。这时称f在点

x为浸入。若f在M中每点为浸入，则称f为由M到N中的浸入。R^k到R^l($k<l$)中的**内含映射称典则浸入**：

$$J:\ (x_1,\cdots,x_k)\to(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0).$$

对微分同胚来说，这是唯一的局部浸入。

定理6 （局部浸入定理） 设$f:M\to N$在点x为浸入，则在点x及$y=f(x)$近旁存在局部坐标，使

$$f(x_1,\cdots,x_k)=(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0).$$

证 先选择局部表示，使构成可换图：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \uparrow{\scriptstyle\varphi} & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ U & \xrightarrow{g} & V \end{array}, \qquad \varphi(0)=x,\ U\subset R^k;$$

$$\psi(0)=y,\ V\subset R^l.$$

因$Tg(0):U\times R^k\to V\times R^l$为内射，必要时改变$R^l$中基底，可认为$Tg(0)$的$l\times k$矩阵取形：

$$\begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix},$$

I_k为$k\times k$单位方阵。作映射$G:U\times R^{l-k}\to R^l$如下：

$$G(x,z)=g(x)+(0,z),\quad z\in R^{l-k}.$$

G映R^l中的开集为R^l中的开集，且$TG(0)$的方阵为I_l。由反函数定理知G在坐标原点为R^l中局部微分同胚．注意$g=G\circ J$，J为典则浸入。因ψ及G在原点为局部微分同胚，故$\psi\circ G$亦然，且可用作N在点y的局部坐标。必要时适当缩小U及V，可使下图为可换图：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\ f\ } & N \\ \uparrow{\scriptstyle \varphi} & & \uparrow{\scriptstyle \psi\circ G} \\ U & \xrightarrow{\ J\ } & V \end{array}$$

由此得

$$f=\psi\circ(G\circ J)\circ\varphi^{-1}=(\psi\circ G)\circ J\circ\varphi^{-1},$$

这正好给出定理所需结果。

推论1 若f在点x为没入，则f在x的某邻域中为没入。

这个推论表明没入为局部性质。因此，任意没入$f:M\to N$的象集$f(M)\subset N$不必是N的子流形。事实上，没入不一定是内射。但即令是内射的没入f，$f(M)$也不必是N的子流形。仅当还要求内射的没入f为**适映射**：即N中每个紧集的原象$f^{-1}(N)$也是紧集时，象集$f(M)$才是N中子流形。这就是下面定理的结论。

定理7 内射的适没入(称嵌入)$f:M\to N$微分同胚地映M到N的子流形上。

证 为证$f(M)$为N的子流形，只需证任一开集$W\subset M$的象$f(W)$为$f(M)$的开子集，于是据定理6，即知子流形性质(SM)成立。若$f(W)$不为开子集，则存在点列$\{y_i\}\subset f(M)$，不属于$f(W)$，但收敛于某点$y\in f(W)$。今$\{y,y_i\}$为紧集，而f为适映射，故$\{y,y_i\}$在M中的原象也是紧集。由于f为内射，每点y_i只有一个原象点$x_i\in M$，且y的唯一原象点$x\in W$。因$\{x,x_i\}$为紧集，故有子列(不妨仍记为x_i)收敛于$z\in M$。于是有$f(x_i)\to f(z)$。但$f(x_i)\to f(x)$，由f的内射性知应有$z=x$。但W为开集，且$x_i\to x$，故对大的i有$x_i\in W$，随之$f(x_i)=y_i\in f(W)$。这与假定$y_i\notin f(W)$不符。故$f(W)$为开集。因此，$f(M)$为N的子流形。容易验证$f:M\to f(M)$为微分同胚.

首先，已知它是局部微分同胚。由于它是双射，故 f^{-1}有定义并属C^{∞}。定理证毕。

当$\dim M>\dim N$时，若切射Tf在点x为盖射，则称 f 在**点x为浸盖**；若f在M的每点为浸盖，则称f为由M到N上的浸盖。特别，R^k到$R^l(k>l)$上的投影称**典则浸盖**：

$$K: (x_1,\cdots,x_k)\to(x_1,\cdots,x_l).$$

类似于没入映射，有如下结果。

定理8（局部浸盖定理） 设$f:M\to N$在点x为浸盖，则存在x及$y=f(x)$的局部坐标，使

$$f(x_1,\cdots,x_k)=(x_1,\cdots,x_l).$$

证 设给定任意的局部映射可换图：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \uparrow{\scriptstyle\varphi} & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ U & \xrightarrow{g} & V \end{array} \qquad \begin{array}{l} \varphi(0)=x,\ U\subset R^k; \\ \psi(0)=y,\ V\subset R^l. \end{array}$$

因$Dg(0)$为盖射：$R^k\to R^l(k>l)$，由R^k中坐标的满秩线性变换，总可认为$Dg(0)$的$l\times k$矩阵取形$(I_l|0)$。现在定义$G:U\to R^k$如下：

$$G(a)=(g(a),a_{l+1},\cdots,a_k),\quad a=(a_1,\cdots,a_k)\in U.$$

方阵$DG(0)=I_k$，故G在点$x=0$为局部微分同胚。于是G^{-1}存在且为由原点某开邻域U'到U中的微分同胚。据G的定义知$g=K\circ G$，K为典则浸盖。故$g\circ G^{-1}=K$，随之得可换图：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \uparrow{\scriptstyle\varphi\circ G^{-1}} & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ U' & \xrightarrow{K} & V \end{array}$$

而给出定理所需映射$f=\psi\circ K\circ(\varphi\circ G^{-1})^{-1}$.

推论2 若f在点x为浸盖，则它在x的某邻域中为浸盖。

给定光滑映射$f:M\to N$。若对点$y\in N$，在每个使$f(x)=y$的点x，切射Tf为盖射，则称y为f的**正则值**，相应的原象x都称为**正则点**；$f(M)$的非正则值称为f的**临界值**，相应的原象x称为**临界点**。一般，$N\setminus f(M)$中的y也称为f的**正则值**。

定理9（原象定理） 若y为$f:M\to N$的正则值，则原象$f^{-1}(y)$为M的子流形，且

$$\dim f^{-1}(y)=\dim M-\dim N.$$

证 据定理8知存在x及$y=f(x)$的局部坐标使

$$f(x_1,\cdots,x_k)=(x_1,\cdots,x_l),$$

且y对应于R^l中原点。在点x近旁，$f^{-1}(y)$为点集$\{(0,\cdots,0,x_{l+1},\cdots,x_k)\}$。确切些说，设$V$为$x$在此局部坐标下的邻域，则集$f^{-1}(y)\cap V$为使$x_1=0,\cdots,x_l=0$的集. 故函数$x_{l+1},\cdots,x_k$作成此集的局部坐标；而集$f^{-1}(y)\cap V$则为$R^{k-l}\times\{0\}$的相对开子集。故$f^{-1}(y)$为$M$的子流形。维数关系是显然的。

1.5 向量丛

1.5.1 定义

粗略地说，向量丛是在流形的每点附一向量空间的集，例如n维球面S^n及在其每点的切平面作成向量丛(切丛)；S^n及其每点的法线也作成向量丛(法丛)。下面分两步引进向量丛的一般定义。

定义1 设E及F为有限维实向量空间，U为E的开子集. 称直积$U\times F$为**局部向量丛**；特别若$F=R^m$，则称$U\times R^m$为平

凡局部向量丛，U称为**底空间**，而可等同于$U\times\{0\}$，所谓的**零截口**。对点$u\in U$，称$\{u\}\times F$为局部向量丛在点u上的**纤维**，可赋以F的向量空间结构。由$\pi(u,f)=u$（$\forall f\in F$）定义的映射

$$\pi: U\times F\to F$$

称局部向量丛的**投影**。对任一点$u\in U$，其上纤维是$\pi^{-1}(u)$。

因$U\times F$为$E\times F$的开子集，故为子流形。

设φ为局部向量丛间的映射：$U\times F\to U'\times F'$。若φ为C^∞微分同胚且具形

$$\varphi(u,f)=(\varphi_1(u),\varphi_2(u)\cdot f),$$

φ_2为线性同构，则称φ为**局部向量丛同构**。

定义2 集S的**局部向量丛细图**是$(U,\varphi)'$ $U\subset S$，φ:$U\to U'\times F'$为双射（$U'\times F'$可与φ有关）。S上的**向量丛图集**是族$\mathscr{B}=\{(U_i,\varphi_i)\}$，而具性质：

$VBA1=MA1$，即 $S=\bigcup_i U_i$；

$VBA2$ 对$\mathscr{B}$中任二细图(U_i,φ_i)，(U_j,φ_j)，$U_i\cap U_j\neq\varnothing$，有$\varphi_i(U_i\cap U_j)=U_i''\times F_i''$，且**迁移函数**

$$\psi_{ji}=\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i\cap U_j)}$$

为局部向量丛同构。

若$\mathscr{B}_1$及$\mathscr{B}_2$是S上二向量丛图集，则当$\mathscr{B}_1\cup\mathscr{B}_2$仍作成$S$上图集时，称为**等价图集**。$S$上**向量丛结构**是向量丛图集的等价类；**向量丛**是底集S及其上向量丛结构$\mathscr{V}$的结合，记作$E=(S,\mathscr{V})$；通常等同E于S，而略去结构$\mathscr{V}$不记。

由$VBA1$--2知$MA1$—2成立，故$\mathscr{V}$在S上导出可微结构。以后总认为S具分离的、第二可列性拓扑，并有固定维数n。

对向量丛$E=(S,\mathscr{V})$可如下定义零截口：

$$E_0=\{e\in E:\exists(U,\varphi)\in\mathscr{V}\Rightarrow e=\varphi^{-1}(u',0),u'\in U\},$$

故E_0是局部向量丛的所有零截口的并。

设$(U,\varphi)\in\mathscr{V}$为向量丛细图，$e_0\in U$，而使$\varphi(e_0)=(u',0)$。记

$$E_{e_0,\varphi}=\varphi^{-1}(\{u'\}\times F'),$$

并赋以由双射φ导出的有限维实向量空间结构，而称为向量丛E在点e_0上的纤维。

定理1　1）若e_0位于二细图(U_1,φ_1)，(U_2,φ_2)的交集$U_1\cap U_2$中，则

$$E_{e_0,\varphi_1}=E_{e_0,\varphi_2}$$

等号表明点集因子及实向量空间因子分别重合；

2）对$e\in E$，恰存在一点$e_0\in E_0$，使对某(U_1,φ_1)有

$$e\in E_{e_0,\varphi_1};$$

3）E_0是E的子流形；

4）映射$\pi:E\to E_0$：$\pi(e)=e_0$为盖射且属C^∞，这里e_0是2）中由e所确定的唯一对应元e_0。

证　1）设$\varphi_1(e_0)=(u_1',0)$，$\varphi_2(e_0)=(u_2',0)$。可认为φ_1及φ_2的定义域等同。因迁移函数$\alpha=\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}$为局部向量丛同构，而

$$E_{e_0,\varphi_1}=\varphi_1^{-1}(\{u_1'\}\times F_1')=\varphi_2^{-1}\circ\alpha^{-1}(\{u_1'\}\times F_1')$$

$$=\varphi_2^{-1}(\{u_2'\}\times F_2')=E_{e_0,\varphi_2},$$

这里用到如下诸关系

$$\varphi_2^{-1}:\{\varphi_2(e)\}=\{u_2'\}\times F_2'\to e,\qquad \varphi_1\varphi_2^{-1}:\varphi_2(e)\to\varphi_1(e);$$

$$\alpha:\ \varphi_2(e)=\{u_2'\}\times F_2'\to\{u_1'\}\times F_1',$$

$$\alpha^{-1}:\{u_1'\}\times F_1'\to\{u_2'\}\times F_2'.$$

故$E_{e_0,\varphi_1}=E_{e_0,\varphi_2}$，且向量空间结构一致。

2) 若$e\in E$，$\varphi_1(e)=(u_1,f_1)$，$\varphi_2(e)=(u_2,f_2)$，$e_1=\varphi_1^{-1}(u_1,0)$，$e_2=\varphi_2^{-1}(u_2,0)$，则$\alpha(u_2,f_2)=(u_1,f_1)$，故$\alpha$为线性同构：$\{u_2\}\times F_2'\to\{u_1\}\times F_1'$。于是

$$\varphi_1(e_2)=\alpha(u_2,0)=(u_1,0)=\varphi_1(e_1)\Rightarrow e_2=e_1.$$

3) 只需验证：对$e_0\in E_0$，存在细图(U,φ)具1.4.3子流形性质(SM)。由这个细图构造向量丛细图，不妨仍记为(U,φ)，使$e_0\in U$，即得性质(SM)：

$$\varphi(U\cap E_0)=U'\times\{0\}=\varphi(U)\cap(E_0'\times\{0\}).$$

4) π显然为盖射。只需证局部有$\pi\in C^\infty$。由局部表示知$\pi:(u_1',f')\to(u_1',0)$，故局部有$\pi\in C^\infty$。

推论1 设E为向量丛，其零截口E_0为其子流形，且存在映射$\pi:E\to E_0$，称为**向量丛投影**，属于C^∞且为盖射。对每点$e_0\in E_0$，$\pi^{-1}(e_0)$为e_0上的纤维，而由任一向量丛细图导出其上向量空间结构。

根据这个推论，可把向量丛$E=(S,\mathscr{V})$表示为π：$E\to E_0$或(E,π,E_0).

定义3 设$\pi:E\to B$为向量丛。π的C^r**截**口是任一个具如下性质的C^r映射$\xi:B\to E$，使对每一点$b\in B$，有

$$\pi(\xi(b))=b \quad 即 \quad \pi\circ\xi=id_B.$$

用Γ_π^r记π的所有C^r截口的集，并附以（无限维）实向量空间结构。

1.5.2 切丛

在1.4.4中曾用局部表示定义流形映射f的切射Tf，现在用另一途径引进切射，而分成几步。

定义4 设M为流形，$m\in M$。称C^1映射$C: I\to M$为**过点m的曲线**，这里I为R中开区间，且$0\in I$，$C(0)=m$。设c_1及c_2都是M上过点m的曲线，(U,φ)为M中细图，使$m\in U$。若$\varphi\circ c_1$及$\varphi\circ c_2$在点O相切，则称c_1及c_2**关于φ在点m相切**。

定理2 设c_1及c_2为M上过点m的二曲线，(U_1,φ_1)及(U_2,φ_2)为M上含m的二细图，则当且仅当c_1及c_2关于φ_2在点m相切时，它们关于φ_1在点m相切。

证 当且仅当

$$D(\varphi_1\circ c_1)(0)=D(\varphi_1\circ c_2)(0)$$

时，c_1及c_2关于φ_1在m相切，这里不妨认为$c_1(0)=c_2(0)=m$.因

$$\varphi_2\circ c_j=(\varphi_2\circ\varphi_1^{-1})\circ(\varphi_1\circ c_j),\quad j=1,2,$$

据1.4.2定理 2 知有

$$D(\varphi_2\circ c_1)(0)=D(\varphi_2\circ c_2)(0),$$

故定理成立。

这个定理表明：曲线在一点$m\in M$相切与所用细图无关。显然，在点m相切是过m的曲线间的等价关系，记其等价类为$[c]_m$，这里c是过点m的等价曲线族的代表。

定义5 过流形M上点m的等价曲线类的集$T_m(M)\equiv\{[c]_m\}$称为M在点m的**切空间**。对集$A\subset M$，记$TM|_A=\bigcup_{m\in A}T_m(M)$；特别当$A=M$时，

$$TM\equiv TM|_M$$

称为M的**切丛**。由$\tau_M([c]_m)=m$定义的映射

$$\tau_M:\ TM\to M$$

称为M的**切丛投影**。

现在应证明1.4.2中定义的T_1：$T_1U=U\times F$与上面定义的T_2在局部情形重合一致：$T_1U=T_2U$，即在与流形任一开

集微分同胚的有限维实空间上同构。

定理3 设U为有限维实向量空间E的开子集，c为过点$u\in U$的曲线，则存在唯一的$e\in E$，使由$c_{u,e}(t)=u+te$定义的曲线$c_{u,e}$在点u与c相切。

证 由1.4.2知$Dc(0)$是$\mathscr{L}(R,E)$中唯一的线性映射，使由下式

$$g(t)=u+Dc(0)t$$

给定的曲线$g:R\to E$在$t=0$切于c。取$e=Dc(0)\cdot 1$，有$g=c_{u,e}$，故定理成立。

据定理3知映射$i:T_1U\to T_2U$：$i(u,e)=[c_{u,e}]_u$为双射，并可用i在T_2U上定义局部向量丛结构。由此知T_1U与T_2U为局部同构。

定理4 设流形M上二曲线c_1及c_2切于$m\in M$，$f:M\to N$属C^1，则$f\circ c_1$及$f\circ c_2$切于$f(m)\in N$。

证 由1.4.2定理2知$f\circ c_1$及$f\circ c_2$都属C^1。为了证明它们在点$f(m)$相切，取N上细图(V,ψ)，使$f(m)\in V$。今证

$$D(\psi\circ f\circ c_1)(0)=D(\psi\circ f\circ c_2)(0). \qquad (1)$$

因$\psi\circ f\circ c_j=(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ c_j)$，$j=1,2$，这里$(U,\varphi)$为$M$上细图，且$m\in U$，$f(U)\subset V$。据1.4.2定理2，知(1)式成立，故定理得证。

由这个定理可引出下面的定义。

定义6 设流形映射$f:M\to N$属C^1，定义

$$Tf:TM\to TN,\quad Tf([c]_m)=[f\circ c]_{f(m)},$$

而称Tf为f的切射。

定理5 1）设$f:M\to N$，$g:N\to K$都属C^1，则$g\circ f:M\to K$也属C^1，且有

$$T(g\circ f)=(Tg)\circ(Tf);$$

2） 设$h: M\to M$为恒等映射，则$Th: TM\to TM$也是恒等映射；

3） 若$f: M\to N$为微分同胚，则$Tf: TM\to TN$为双射，且

$$(Tf)^{-1}=T(f^{-1}).$$

证 1) 设(U,φ)，(V,ψ)，(W,ρ)分别为M,N,K中细图，使$f(U)\subset V$，$g(V)\subset W$，则对局部表示有

$$(g\circ f)_{\varphi\rho}=\rho\circ g\circ f\circ\varphi^{-1}=\rho\circ g\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$$
$$=g_{\psi\rho}\circ f_{\varphi\psi},$$

据1.4.2定理2知上式左边随之$g\circ f$属C^1。此外，

$$T(g\circ f)([c]_m)=[g\circ f\circ c]_{g\circ f(m)};$$
$$(Tg)\circ(Tf)([c]_m)=Tg\circ([f\circ c]_{f(m)})$$
$$=[g\circ f\circ c]_{g\circ f(m)},$$

上两式右边相等，故得$T(g\circ f)=(Tg)\circ(Tf)$.

2） 是定义6的直接推论。

3） f及f^{-1}显然都是微分同胚，且$f\circ f^{-1}$为N上恒等映射，$f^{-1}\circ f$为M上恒等映射。由1)及2)知$(Tf)\circ(Tf^{-1})$及$(Tf^{-1})\circ(Tf)$分别是TN及TM上的恒等映射。定理得证。

应用数学归纳法，由1)可得如下结果。

推论2 设$f: M\to N$，$g: N\to K$都属C^r，则$g\circ f$也属C^r，且有

$$T^r(g\circ f)=(T^r g)\circ(T^r f).$$

以后总等同M于其切丛TM的零截口；等同切丛投影τ_M: $TM\to M$于切丛到零截口上的向量丛投影。

1.5.3 贯截映射

定义7 设M及N为流形，$f: M\to N$属C^1，Q为N的子流

形。若在点$x=f^{-1}(y)\subset f^{-1}(Q)$有

$$T_yN=T_yQ\oplus T_yf(M), \qquad (2)$$

即称映射**f在点x贯截于Q**；若对每点$x\in f^{-1}(Q)$都如此，则称**f贯截于Q**，记作$f\pitchfork Q$。特别若M及Q都是N的子流形，且M到N中的典则内含在$x\in M\cap Q$贯截于Q，则称**M在点x贯截于Q**；若对每点$x\in M\cap Q$都如此，则称**M贯截于Q**，记作$M\pitchfork Q$.

易知M在点x贯截于Q的等价定义是：

$$T_xN=T_xM+T_xQ. \qquad (3)$$

定理6 若光滑映射$f:M\to N$贯截于子流形$Q\subset N$，则原象$f^{-1}(Q\cap f(M))$为M的子流形，且

$$\operatorname{codim}f^{-1}(Q\cap f(M))=\operatorname{codim}Q.$$

这里codim记余维数，例如：$\operatorname{codim}Q=\dim N-\dim Q$.

证 对任一点$y\in Q\cap f(M)$，记$y=f(x)$。可在y的邻域中表Q为独立函数$g_1,\cdots,g_l$的零点集，这里$l=\operatorname{codim}Q$。故在点x的某邻域W中，原象$f^{-1}(Q\cap f(M))$为$g_1\circ f,\cdots,g_l\circ f$的零点集。用$g$记在点$y$近旁定义的浸盖$(g_1,\cdots,g_l)$。可应用1.4.4定理9于映射$g\circ f:W\to R^l$，即当点0为$g\circ f$的正则值时，$(g\circ f)^{-1}(0)$为$M$中子流形。为证明点$x\in f^{-1}(Q\cap f(M))$为正则点，只需证$T(g\circ f)(x)$或$D(g\circ f)(x)$为盖射。由于

$$D(g\circ f)(x)=Dg(y)\circ Df(x),$$

线性映射$D(g\circ f)(x):T_xM\to R^l$当且仅当$Dg(y)$把$Df(x)$的象映射到$R^l$上时为盖射。但$Dg(y):T_yN\to R^l$为线性盖射，且其核(即零点集)为子空间$T_yQ$，故$Dg(y)$把$T_yN$的子空间映射到$R^l$上时，恰当此子空间$T_y(f(M))$与$T_yQ$一道张成整个空间$T_yN$。这一点正好由(2)式所保证。

至于余维数相等，则是显然的，因$f^{-1}(Q\cap f(M))$和Q都由l个独立函数的零点集局部确定。

推论3 流形N的二贯截子流形M及Q的交仍为子流形，且有

$$\operatorname{codim}(M\cap Q)=\operatorname{codim}M+\operatorname{codim}Q.$$

事实上，对有限维实向量空间G的线性子空间E与F，$E\cap F\neq\varnothing$，容易验证关系式：

$$\dim(E\cap F)=\dim E+\dim F-\dim G.$$

1.5.4 张量丛

用$\mathscr{L}^k(E_1\times\cdots\times E_k,F)$记由有限维实向量空间的直积$E_1\times\cdots\times E_k$到$F$的连续多重线性映射的集。特别记$E^*=\mathscr{L}(E,R)$，称为$E$的**代数对偶空间**。若$\widehat{e}=(e_1,\cdots,e_n)$为$E$的一组基底，则$E^*$中存在唯一的一组**对偶基底**$\widehat{e}^*=(\alpha^1,\cdots,\alpha^n)$，使

$$\alpha^j(e_i)=\delta^j_i,$$

其中δ^j_i为Kronecker记号，$\alpha^j(e_i)$为对偶作用式：

$$\alpha^j(e_i)\equiv\alpha^j_1e_i^{(1)}+\cdots+\alpha^j_ne_i^{(n)},$$

α^j_k与$e_i^{(k)}$分别是α^j与e_i的分量。利用这两组基底，E中每个向量e可表示为：

$$e=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i(e)e_i.$$

E^*中每个向量α则可表示为：

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha(e_i)\alpha^i.$$

可等同$(E^*)^*\equiv E^{**}\equiv\mathscr{L}(E^*,R)$于$E$：对每个$e\in E$，可对应于由

$$e^{**}(\alpha)=\alpha(e)$$

所确定的$e^{**}\in E^{**}$，这里α为E^*中任一向量。因E有有限维数n，映射$e\to e^{**}$为同构。

定义6 记$T^r_s(E)\equiv\mathscr{L}^{r+s}(E^*\times\cdots\times E^*\times E\times\cdots\times E,R)$，$r$与$s$分别是$E^*$和$E$在直积中的重数，$T^r_s(E)$中元称为**$E$上具反变阶$r$、共变阶$s$的张量**，简称为$\binom{r}{s}$**型张量**。

据1.4.2定理3有等同关系

$$T^1_0(E)\approx E,\qquad T^0_1(E)\approx E^*.$$

定理7 设$\dim E=n$，则$T^r_s(E)$为n^{r+s}维的实向量空间。若$\widehat{e}=(e_1,\cdots,e_n)$为$E$的一组基底，则$T^r_s(E)$有基底：

$$\{e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes\alpha^{j_1}\otimes\cdots\otimes\alpha^{j_s},\ 1\leqslant i_k,j_l\leqslant n,$$
$$1\leqslant k\leqslant r,\ 1\leqslant l\leqslant s\},\qquad (4)$$

其中$\widehat{e}^*=(\alpha^1,\cdots,\alpha^n)$为$\widehat{e}$的对偶基底。

证 应证(4)式中张量线性无关，且张成$T^r_s(E)$。用反证法而设(4)式中元线性相关：

$$\sum_{i_k,j_l}t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes\alpha^{j_1}\otimes\cdots\otimes\alpha^{j_s}=0.\qquad (5)$$

和$\sum\limits_{i_k,j_l}$乃对所有i_k,j_l而取，$1\leqslant i_k,j_l\leqslant n,1\leqslant k\leqslant r,1\leqslant l\leqslant s$.把(5)式的左边作用于任一固定向量$(\alpha^{k_1},\cdots,\alpha^{k_r},e_{l_1},\cdots,e_{l_s})$，由于$e_i(\alpha^j)=\alpha^j(e_i)=\delta^j_i$，得：

$$t^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}=0,$$

但k_i, l_j为任意的，故(5)式中所有系数$t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=0$. 这表明(4)式中元不可能是线性相关的。其次，对任一张量$t\in T^r_s(E)$，总可得表示式：

$$t=\sum t(\alpha^{i_1},\cdots,\alpha^{i_r};\ e_{j_1},\cdots,e_{j_s})e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes\alpha^{j_1}\otimes\cdots$$

$$\cdots\otimes\alpha^{j_s},\qquad (6)$$

故(4)式确张成$T^r_s(E)$。最后，(4)式显然作成n^{r+s}维向量空间的基底。

系数

$$t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=t(\alpha^{i_1},\cdots,\alpha^{i_r}_j;e_{j_1},\cdots,e_{j_s})$$

称为张量t关于基底(4)的**分量**。

可定义张量$t_1\in T^{r_1}_{s_1}(E)$及$t_2\in T^{r_2}_{s_2}(E)$的张量积$t_1\otimes t_2$如下作用：

$$t_1\otimes t_2(\beta^1,\cdots,\beta^{r_1};\gamma^1,\cdots,\gamma^{r_2};\ f_1,\cdots,f_{s_1};\ g_1,\cdots,g_{s_2})$$

$$=t_1(\beta^1,\cdots,\beta^{r_1};f_1,\cdots,f_{s_1})t_2(\gamma^1,\cdots,\gamma^{r_2};\ g_1,\cdots,g_{s_2}),$$

其中$\beta^i,\gamma^j\in E^*$，$f_k,g_l\in E$。显然有$t_1\otimes t_2\in T^{r_1+r_2}_{s_1+s_2}(E)$。

定义9 设$\varphi\in\mathscr{L}(E,F)$为$E$与$F$间的线性同构，定义$T^r_s\varphi\equiv\varphi^r_s\in\mathscr{L}(T^r_s(E),T^r_s(F))$如下：

$$(\varphi^r_s t)(\beta^1,\cdots,\beta^r;f_1,\cdots,f_s)$$

$$=t(\varphi^*(\beta^1),\cdots,\varphi^*(\beta^r);\varphi^{-1}(f_1),\cdots,\varphi^{-1}(f_s)),$$

$$\beta^1,\cdots,\beta^r\in F^*,\ f_1,\cdots,f_s\in F,\ \forall t\in T^r_s(E),$$

其中$\varphi^*\in\mathscr{L}(F^*,E^*)$，称为由$\varphi$引出的拖射而以如下方式定义

$$\varphi^*(\beta)\cdot e=\beta(\varphi(e))=(\beta\circ\varphi)(e),\quad \forall e\in E,\quad \forall\beta\in F^*.$$

φ^*的逆$\varphi_*=(\varphi^*)^{-1}\in\mathscr{L}(E^*,F^*)$，则称为**推射**。

不难核验如下关系

$$\varphi_1^0=(\varphi^{-1})^*=(\varphi^*)^{-1}=\varphi_*;$$

$$\varphi_*(\alpha)\cdot f=(\alpha\circ\varphi^{-1})(f),\quad \forall f\in F,\ \alpha\in E^*,$$

并可等同φ与φ_0^1。

定理8 设$\varphi:E\to F$，$\psi:F\to G$都是线性同构，则有：

1） $(\psi\circ\varphi)_s^r=\psi_s^r\circ\varphi_s^r$即$\varphi_s^r$为共变函子；

2） 若$I:E\to E$为恒等映射，则 $I_s^r:T_s^r(E)\to T_s^r(E)$也是恒等映射；

3） $\varphi_s^r:T_s^r(E)\to T_s^r(F)$也是线性同构，且

$$(\varphi_s^r)^{-1}=(\varphi^{-1})_s^r.$$

证 1）据定义9有：

$$\begin{aligned}
&\psi_s^r(\varphi_s^r t)(\gamma^1,\cdots,\gamma^r;\ g_1,\cdots,g_s)\\
&=(\varphi_s^r t)(\psi^*(\gamma^1),\cdots,\psi^*(\gamma^r);\ \psi^{-1}(g_1),\cdots,\psi^{-1}(g_s))\\
&=t(\varphi^*\psi^*(\gamma^1),\cdots,\varphi^*\psi^*(\gamma^r);\ \varphi^{-1}\psi^{-1}(g_1),\cdots,\varphi^{-1}\psi^{-1}(g_s))\\
&=t((\psi\circ\varphi)^*(\gamma^1),\cdots,(\psi\circ\varphi)^*(\gamma^r);(\psi\circ\varphi)^{-1}(g_1),\cdots,\\
&\quad(\psi\circ\varphi)^{-1}(g_s))\\
&=(\psi\circ\varphi)_s^r t(\gamma^1,\cdots,\gamma^r;\ g_1,\cdots,g_s),\quad \forall t\in T_s^r(E),
\end{aligned}$$

$\gamma^1,\cdots,\gamma^r\in G^*$，$g_1,\cdots,g_s\in G$。至于关系式

$$(\psi\circ\varphi)^*=\varphi^*\circ\psi^*,\quad (\psi\circ\varphi)^{-1}=\varphi^{-1}\circ\psi^{-1},$$

易于直接核验。

2） 是定义 9 及显然的关系式$I^*=I,I^{-1}=I$的推论。

3） 由1)及2)有$\varphi_s^r\circ(\varphi^{-1})_s^r=I_s^r$，右边是 $T_s^r(F)$ 上的恒等映射；同样可得$T_s^r(E)$上恒等映射：$(\varphi^{-1})_s^r\circ\varphi_s^r=I_s^r$。由此即得3)。

定义10 设U为有限维实向量空间E的开集，称$U\times$

$T^r_s(E)$为局部张量丛。一般地，设π：$E \to B$为向量丛，$E_b = \pi^{-1}(b)$为$b \in B$上纤维。定义

$$T^r_s(E) = \bigcup_{b \in B} T^r_s(E_b);\quad \pi^r_s(E): T^r_s(E) \to B: \pi^r_s(e) = b,\quad e \in T^r_s(E_b)$$

对B的子集A，令

$$T^r_s(E)|_A = \bigcup_{b \in A} T^r_s(E_b).$$

若特别取向量丛$\pi: E \to B$为切丛$\tau_M: TM \to M$，M为给定流形，记

$$T^r_s(M) \equiv T^r_s(TM)$$

而称为$\binom{r}{s}$型张量丛；其中$T^0_1(M)$称为余切丛，记作：

$$\tau^*_M: T^*M \to M.$$

因E^{**}可等同于E，故$T^1_0(M)$可等同于切丛TM。因TM的零截口可等同于M，故$T^r_s(M)$的零截口也等同于M。

定义11 $T^r_s(M)$的C^∞截口称为流形M上的$\binom{r}{s}$型张量场。用$\mathscr{T}^r_s(M)$记截口集$\Gamma^\infty(T^r_s(M))$，并附以(无限维)实向量空间结构。用$\mathscr{F}(M)$记M到R的所有C^∞映射，并附以环结构：

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);\quad (cf)(x) = cf(x);$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x),\qquad \forall f, g \in \mathscr{F}(M),\ \forall c \in R.$$

特别记$\mathscr{X}(M) \equiv \mathscr{T}^1_0(M)$，其中元为$M$上向量场；$\mathscr{X}^*(M) \equiv \mathscr{T}^0_1(M)$中元称为$M$上余向量场。

特别重要且最常用到的是切丛与余切丛、向量场与余向量场。

1.5.5 Lie导数

在流形M上一点m的切空间T_mM，任一切向量(切向导射)

在相应细图的局部坐标$(x_1,\cdots,x_n)$下显然可表示为

$$X=\left(X^1\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,X^n\frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

即T_mM以$\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$作成自然基底；故其对偶基底为

$$\widehat{e}^*=(dx_1,\cdots,dx_n);\quad dx_i\frac{\partial}{\partial x_j}=\delta_j^i,$$

$\widehat{e}^*$是余切空间T_m^*M的自然基底。

定义12 设$f\in\mathscr{F}(M)$，这时$Tf:TM\to TR=R\times R$。记

$$T_mf=Tf|_{T_mM}\in\mathscr{L}(T_mM,\{f(m)\}\times R),\ m\in M.$$

用P_2记由T^*M到其第二因子空间(纤维)的投影，定义

$$df:M\to T^*M;\ df(m)=P_2\circ T_mf,\tag{7}$$

而称df为f的**微分**。对$X\in\mathscr{X}(M)$，定义

$$L_Xf:M\to R;\ L_Xf(m)=df(m)\cdot[X(m)],\tag{8}$$

而称L_Xf为f沿向量X的**Lie导数**。

根据关于T_mM中自然基底的讨论，知有

$$df(m)=P_2\circ T_mf=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1,\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right),$$

$$L_Xf(m)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1,\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right)\cdot\left(X^1\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,X^n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^nX^i\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

故在局部坐标下，f沿X的Lie导数与通常的沿X的方向导数一致。

附带提到，Lie导数还可用如下方式定义。

对$X\in\mathscr{X}(M)$，由常微分方程组初值问题

$$\sigma' \equiv \frac{d}{dt}\sigma(t,x) = X(\sigma), \quad \sigma(0,x) = x \in M$$

确定$\sigma(t,x)$，定义

$$L_X f(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(\sigma(t,x)) - f(x)], \quad f \in \mathscr{F}(M);$$

$$L_X Y|_x = \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{\sigma}(Y(\sigma(t,x)) - Y(x)\right] \Big/ t, \quad Y \in \mathscr{X}(M);$$

$$L_X \omega|_x = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\sigma^*(\omega(\sigma(t,x))) - \omega(x)], \quad \omega \in \mathscr{X}(M),$$

这里σ^*为由σ引出的拖射：$(\sigma^*\omega)\cdot X = \omega(\sigma' X)\circ\sigma$.

可核验这样定义的$L_X f(x)$与(8)式一致；还可算出

$$L_X Y = X\circ Y - Y\circ X \equiv [X, Y],$$

而称为X与Y的Lie括号。

1.6 定向流形

1.6.1 外代数

定义1 设E为有限维实向量空间。记

$$\Omega^0(E) \equiv R; \ \Omega^1(E) \equiv E^*; \ \Omega^k(E) \equiv \mathscr{L}_a^k(E, R),$$
$$k = 2, 3, \cdots,$$

$\mathscr{L}_a^k$是E上斜对称k重线性有界映射的集，见1.4.2。$\Omega^k(E)$中元称为k型式。

$\Omega^k(E)$是$T_k^0(E)$的子空间。

定义2 交替映射A：$T_k^0(E) \to T_k^0(E)$定义如下：

$$At(e_1, \cdots, e_k) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}(\mathrm{sgn}\,\sigma)t(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(k)}),$$

S_k是k个数$(1,2,\cdots,k)$的排列群，由所有排列

$$\sigma: (1,\cdots,k)\to(\sigma(1),\cdots,\sigma(k))$$

组成，其阶$k!$；式中的和乃对S_k中$k!$个元作和，$\mathrm{sgn}\sigma$见1.4.2注2。

定理1 A为由$T^0_k(E)$到$\Omega^k(E)$上的线性映射，$A|_{\Omega^k(E)}$为恒等映射，且$A\circ A=A$。

证 线性是显然的。若$t\in\Omega^k(E)$，因$(\mathrm{sgn}\sigma)^2=1$且S_k的阶为$k!$，故有：

$$At(e_1,\cdots,e_k)=\frac{1}{k!}\sum_\sigma(\mathrm{sgn}\sigma)t(e_{\sigma(1)},\cdots,e_{\sigma(k)})$$

$$=\frac{1}{k!}\sum_\sigma(\mathrm{sgn}\sigma)^2t(e_1,\cdots,e_k)=t(e_1,\cdots,e_k),$$

$$\forall t\in\Omega^k(E),$$

即$A|_{\Omega^k(E)}$为恒等算子。其次，对$t\in T^0_k(E)$，因$\sigma\to\sigma\tau$为双射且$\mathrm{sgn}(\sigma\tau)=\mathrm{sgn}\sigma\mathrm{sgn}\tau$，有

$$At(e_1,\cdots,e_k)=\frac{1}{k!}\sum_\sigma(\mathrm{sgn}\sigma\tau)t(e_{\sigma\tau(1)},\cdots,e_{\sigma\tau(k)})$$

$$=(\mathrm{sgn}\tau)\sum_\sigma\frac{\mathrm{sgn}\sigma}{k!}t(e_{\sigma\tau(1)},\cdots,e_{\sigma\tau(k)})$$

$$=(\mathrm{sgn}\tau)At(e_{\tau(1)},\cdots,e_{\tau(k)}),$$

故$At\in\Omega^k(E)$。这就证得定理的前二断言；最后的断言$(A\circ A=A)$是这两个断言的直接结果。

定义3 设$\alpha\in T^0_k(E)$，$\beta\in T^0_l(E)$，定义其楔积或外积为：

$$\alpha\wedge\beta\equiv A(\alpha\otimes\beta)\in\Omega^{k+l}(E).$$

特别对$\alpha\in T^0_0(E)=R$，令

$$\alpha\wedge\beta=\beta\wedge\alpha=\alpha\beta.$$

注意即令当$\alpha\in\Omega^k(E)$，$\beta\in\Omega^l(E)$，张量积$\alpha\otimes\beta$一般不属于$\Omega^{k+l}(E)$。

定理2 设$\alpha\in T_k^0(E)$，$\beta\in T_l^0(E)$，$\gamma\in T_m^0(E)$，则有：

1) $\alpha\wedge\beta=A\alpha\wedge\beta=\alpha\wedge A\beta$；

2) 运算$\wedge$为双线性的与结合的；

3) $\alpha\wedge\beta=(-1)^{kl}\beta\wedge\alpha$.

证 1) 先证$A(\sigma t)=(\mathrm{sgn}\sigma)At$，这里$\sigma t$：$t(e_1,\cdots,e_k)\to t(e_{\sigma(1)},\cdots,e_{\sigma(k)})$。事实上，因$\rho\to\rho\sigma$为双射，有：

$$A(\sigma t)=\frac{1}{k!}\sum_\rho(\mathrm{sgn}\rho)t(e_{\rho\sigma(1)},\cdots,e_{\rho\sigma(k)})$$

$$=\sum_\rho\frac{\mathrm{sgn}\sigma}{k!}(\mathrm{sgn}\rho\sigma)t(e_{\rho\sigma(1)},\cdots,e_{\rho\sigma(k)})$$

$$=(\mathrm{sgn}\sigma)At(e_1,\cdots,e_k).$$

其次，因A为线性映射，故得

$$A(A\alpha\otimes\beta)(e_1,\cdots,e_k,\cdots,e_{k+l})$$

$$=A\left[\sum_\tau\frac{\mathrm{sgn}\tau}{k!}\alpha(e_{\tau(1)},\cdots,e_{\tau(k)})\otimes\beta(e_{k+1},\cdots,e_{k+l})\right]$$

$$=\frac{1}{k!}\sum_\tau(\mathrm{sgn}\tau)A(\tau\alpha\otimes\beta)(e_1,\cdots,e_{k+l}).$$

取$\tau'\in S_{k+l}$使

$$\tau'(1,\cdots,k,\cdots,k+l)=(\tau(1),\cdots,\tau(k),k+1,\cdots,k+l),$$

则因$\mathrm{sgn}\tau=\mathrm{sgn}\tau'$且$\tau\alpha\otimes\beta=\tau'(\alpha\otimes\beta)$，前式取形

$$\sum_\tau\frac{(\mathrm{sgn}\tau)^2}{k!}A(\alpha\otimes\beta)(e_1,\cdots,e_{k+l})$$

$$=A(\alpha\otimes\beta)(e_1,\cdots,e_{k+l}),$$

故得$\alpha\wedge\beta=A\alpha\wedge\beta$。同样可得$\alpha\wedge\beta=\alpha\wedge A\beta$.

2) 因运算$\otimes$为双线性的而A为线性的，故$\wedge$为双线性的；其次，可直接核验

$$\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)=\alpha\wedge A(\beta\otimes\gamma)=A(\alpha\otimes(\beta\otimes\gamma))$$
$$=A((\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma)=A(\alpha\otimes\beta)\wedge\gamma=(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$$

3) 设 $\sigma_0(1,\cdots,k+l)=(k+1,\cdots,k+l,1,\cdots,k)$，则有

$$\alpha\otimes\beta(e_1,\cdots,e_{k+l})=\beta\otimes\alpha(e_{\sigma_0(\ )},\cdots,e_{\sigma_0(k+l)}),$$

故由1)的证明过程知 $A(\alpha\otimes\beta)=(\mathrm{sgn}\sigma_0)A(\beta\otimes\alpha)$，但因$\mathrm{sgn}\sigma_0=(-1)^{kl}$，由此即得3)。

定义4 空间列$\{\Omega^k(E),\ k=0,1,\cdots\}$的直和$\Omega(E)=\oplus\Omega^k(E)$，附以实向量空间结构及外积，称为$E$上的**外代数**或Grassmann代数。

定理3 设$\dim E=n$，则对$k>n$有$\Omega^k(E)=\{0\}$，而对$0\leqslant k\leqslant n$有$\dim\Omega^k(E)=\binom{n}{k}$，故$\dim\Omega(E)=2^n$。若$\hat{e}=(e_1,\cdots,e_n)$为$E$的基底，$\hat{e}^*=(\alpha^1,\cdots,\alpha^n)$为对偶基底，则$\Omega^k(E)$的基底是：

$$\{\alpha^{i_1}\wedge\cdots\wedge\alpha^{i_k}:\ 0\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n\}. \tag{1}$$

证 设$t\in\Omega^k(E)$，据1.5.4定理8及本节定理1有

$$t=\sum t(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})\alpha^{i_1}\wedge\cdots\wedge\alpha^{i_k}.$$

但若$\sigma\in S_k$且$i_1,\cdots,i_k$固定，由定理2得：

$$t(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})\alpha^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}$$

$$=t(e_{\sigma(i_1)},\cdots,e_{\sigma(i_k)})\alpha^{\sigma(i_1)}\wedge\cdots\wedge\alpha^{\sigma(i_k)}.$$

故只需对不同的$\{i_1,\cdots,i_k\}$作和并附以因子$k!$：

$$t=k!\sum_{i_1<\cdots<i_k} t(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})\alpha^{i_1}\wedge\cdots\wedge\alpha^{i_k},$$

即任何$t\in\Omega^k(E)$可用(1)式中元表出。现在应证(1)式中 元 线性无关。设不，则有：

$$\sum_{i_1<\cdots<i_k} t_{i_1\cdots i_k}\alpha^{i_1}\wedge\cdots\wedge\alpha^{i_k}=0.$$

对任一组固定的$i_1',\cdots i_k'$，记其指标余集为$i_{k+1}',\cdots,j_n'$，仍按增序排列，即$j_{k+1}'<\cdots<j_n'$。于是有

$$\sum_{i_1<\cdots<i_k} t_{i_1\cdots i_k}\alpha^{i_1}\wedge\cdots\wedge\alpha^{i_k}\wedge\alpha^{j_{k+1}'}\wedge\cdots\wedge\alpha^{j_n'}=0,$$

由定理 2 中3)知$\alpha^i\wedge\alpha^i=0$，故上式只剩下

$$t_{i_1'\cdots i_k'}\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^n=0.$$

下面将证明$\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^n\neq0$，故$t_{i_1'\cdots i_k'}=0$；但$i_1',\cdots,i_k'$为任意的，由此知线性相关的假定是错误的。定理的其余部分可由组合计算而得。

1.6.2 体元和行列式·定向性

定义5 一维空间$\Omega^n(E)$的非零元称为E中**体元**。若ω_1及ω_2为二体元，则当且仅当存在正数C使$\omega_1=C\omega_2$时，二体元称为**等价的**。E上体元的一个等价类称为E上一种**定向**。

定理4 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in E^*$，则它们当且仅当

$$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k=0 \qquad (2)$$

时为线性相关的。

证 若它们线性相关，则对某个$i\in\{1,\cdots,k\}$有

$$\alpha_i=\sum_{j\neq i}c_j\alpha_j,$$

因$\alpha_j\wedge\alpha_j=0$，把α_i的如上表示代入(2)式的左边，即知(2)式成立。反之，若$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$线性无关，可补充而得E^*中基底$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$。下面将证明$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n\neq 0$，故$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k\neq 0$；这表明(2)式确是$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$线性相关的充分条件。

定理5 对$\varphi\in\mathscr{L}(E,E)$，存在唯一的常数$\det\varphi$，称为映射$\varphi$的行列式，使由$\varphi$引出的拖射

$$\varphi^*:\ \varphi^*\omega(e_1,\cdots,e_n)=\omega(\varphi(e_1),\cdots,\varphi(e_n)):$$

$$\Omega^n(E)\to\Omega^n(E)$$

对所有的$\omega\in\Omega^n(E)$具性质

$$\varphi^*\omega=(\det\varphi)\omega. \qquad (3)$$

证 据定理3知$\Omega^n(E)$为一维空间，故若ω_0为基底及$\omega=c\omega_0$，即有$\varphi^*\omega=c\varphi^*\omega_0=K\omega$，$K$为常数，且显然唯一确定。由此特别得出

$$\omega_0=\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^n\neq 0,$$

记$K=\det\varphi$，知定理成立。

定理6 设$\varphi,\psi\in\mathscr{L}(E,E)$，则有：

1) $\det(\varphi\circ\psi)=(\det\varphi)\cdot(\det\psi)$；

2) 若φ为恒等映射，则$\det\varphi=1$；

3) φ当且仅当$\det\varphi\neq 0$时为同构；这时

$$\det(\varphi^{-1})=(\det\varphi)^{-1}.$$

证 1) 据定义知$(\varphi\circ\psi)^*\omega=\det(\varphi\circ\psi)\omega$，但易核验

$$(\varphi\circ\psi)^*\omega=(\psi^*\circ\varphi^*)\omega,$$

故有

$$(\varphi\circ\psi)^*\omega=\psi^*(\det\varphi)\omega=(\det\psi)(\det\varphi)\omega=\det(\varphi\circ\psi)\omega.$$

2） 是行列式定义的显然结果；

3） 设φ为同构，φ^{-1}为其逆，则由1)、2)有：

$$1=\det(\varphi\circ\varphi^{-1})=(\det\varphi)(\det\varphi^{-1}),$$

由此特别得$\det\varphi\neq 0$。反之，若φ不为同构，则存在$e_1\neq 0$，使$\varphi(e_1)=0$。对e_1补充得E中基底$e_1,\cdots,e_n$，而得n型式$\omega\in\Omega^n(E)$，使

$$\varphi^*\omega(e_1,\cdots,e_n)=\omega(0,\varphi(e_2),\cdots,\varphi(e_n))=0,$$

于是$\det\varphi=0$。定理得证。

1.6.3 外微分型式

定义6 设$\pi: E\to B$为向量丛，记

$$\omega^k(E)|_A=\bigcup_{b\in A}\Omega(E_b),$$

其中A为B的子集，$E_b=\pi^{-1}(b)$为沿$b\in B$的纤维。记

$$\omega^k(E)=\omega^k(E)|_B,$$

并定义当且仅当$t\in\Omega^k(E_b)$时，$\omega^k(\pi):\omega^k(E)\to B:\omega^k(\pi)(t)=b$。特别对于切丛$\tau_M: TM\to M$，记

$$\omega^k(M)\equiv\omega^k(TM);\quad \omega_M^k\equiv\omega^k(\tau_M),$$

于是$\omega_M^k:\omega^k(M)\to M$为流形$M$的切空间上的外$k$型式的向量丛。特别记

$$\Omega^0(M)\equiv\mathscr{F}(M);\qquad \Omega^1(M)\equiv\mathscr{T}_0^1(M);$$

$$\Omega^k(M)\equiv\Gamma^\infty(\omega_M^k),\quad k=2,3,\cdots.$$

记$\Omega^k(M)$ $(k=0,1,\cdots,n)$的直和为$\Omega(M)$，附以实向量空间结构及外积，而称为M上的**外微分型式代数**。$\Omega^k(M)$中元称为**k微分型式**；特别，$\mathscr{X}^*(M)\equiv\Omega^1(E)$中元称为**1微分型式**或简称**1型式**。

通常把 $\Omega(M)$ 作为实数域上的向量空间，而不作为环 $\mathscr{F}(M)$上的模，因$\mathscr{F}(M)=\Omega^0(E)$含于直和内，且

$$f\wedge\alpha=f\otimes\alpha=f\alpha.$$

下面求出$\Omega(M)$中元的局部表示，用以揭示外微分型式命名的来历。

设(U,φ)为M上细图，使$U'=\varphi(U)\subset R^n$。记R^n的基底为e_i，令

$$\underline{e_i}(u)=(T_{\varphi(u)}\varphi)^{-1}(\varphi(u),e_i)=(u,T\varphi\cdot e_i),\quad \forall u\in U.$$

类似地，记α^i为e_i的对偶基底，令

$$\underline{\alpha^i}(u)=(T_u\varphi)_*(\varphi(u),\alpha^i)=(\varphi^{-1}\varphi(u),(T\varphi)^{-1}\alpha^i)$$

$$=(u,(T\varphi)^{-1}\alpha^i),$$

故对每个$u\in U$，$\underline{e_i}(u),\underline{\alpha^i}(u)$作成纤维$T_uM$上的对偶基底组。若$\varphi(u)=(x_1(u),\cdots,x_n(u))\in R^n$，在点$u\in U$定义

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\equiv L_{e_i}f=df[\underline{e_i}(u)]=\frac{\partial f_\varphi}{\partial x_i}\circ\varphi^{-1},\ f_\varphi=f\circ\varphi,\tag{4}$$

于是有

$$\underline{\alpha^i}(u)=dx_i(u).\tag{5}$$

事实上(参看1.5.5)，

$$dx_i(u)(\underline{e_j}(u))=P_2\circ T_ux_i\circ T_{\varphi(u)}\varphi^{-1}(\varphi(u),e_j)$$

$$=P_2T_u(x_i\circ\varphi^{-1})(\varphi(u),e_j)=D(x_i\circ\varphi^{-1})(\varphi(u))\cdot e_j$$

$$=Dx_i\cdot e_j=\delta^i_j,$$

因$Dx_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$，1在第$i$个位置，$e_j=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$，1在第$j$个位置。由此即得(5)式；随之得$df$在基底$\underline{\alpha^i}$下的表示为：

$$df(u)=\sum_i df(\underline{e}_i)\underline{a}^i(u)=\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(u)dx_i(u).$$

同样，对$t\in\mathscr{T}_s^r(U)$，有(以下记x_i为x^i)：

$$t(u)=\sum t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}(u)e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s},$$

$$t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=t(dx^1,\cdots,dx^{i_r};\ e_{j_1},\cdots,e_{j_s}).$$

而对每个$\omega\in\Omega^k(U)$，则有：

$$\omega(u)=k!\sum_{i_1<\cdots<i_k}\omega_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k},$$

$$\omega_{i_1\cdots i_k}=\omega(\underline{e}_{i_1},\cdots,\underline{e}_{i_k}).$$

这就是Ω^k中元被称为外微分k型式的来历。

定理7 设M为流形。存在唯一映射$\mathbf{d}$：

$$\mathbf{d}:\ \Omega^k(U)\to\Omega^{k+1}(U),\quad k=0,1,\cdots,$$

其中U为M的开子集。$\mathbf{d}$称为外微分运算，具下列性质：

1) $\mathbf{d}$是$\wedge^-$反引射，即关于实数域R为线性的（简称R线性)且使

$$\mathbf{d}(\alpha\wedge\beta)=(\mathbf{d}\alpha)\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge\mathbf{d}\beta,$$
$$\forall\alpha\in\Omega^k(U),\quad\forall\beta\in\Omega^l(U);$$

注1 映射$D:\mathscr{F}(M)\to\mathscr{F}(M)$，若为$R$线性且使

$$D(fg)=(Df)g+fDg,\quad\forall f,g\in\mathscr{F}(M);$$

即称为$\mathscr{F}(M)$上的**引射**。

2) $\mathbf{d}f=df,\quad\forall f\in\mathscr{F}(U)$.

3) $\mathbf{d}^2\equiv\mathbf{d}\circ\mathbf{d}=0$.

证 先证唯一性。由R线性及定理 3 只需对

$$\omega=f_0df_1\wedge\cdots\wedge df_k,\quad f_i\in\mathscr{F}(U)$$

证明 由性质1)—3)有：

$$d\omega = df_0\wedge df_1\wedge\cdots\wedge df_k\in\Omega^{k+1}(U),$$

而唯一确定。至于存在性，对$\omega = f_0 df_1\wedge\cdots\wedge df_k\in\Omega^k(U)$，定义

$$d\omega = df_0\wedge df_1\wedge\cdots\wedge df_k\in\Omega^{k+1}(U),$$

它显然与细图的选取无关。性质2)是显然的，R线性亦然。为证1)，注意若$\rho = g_0 dg_1\wedge\cdots\wedge dg_l$，则

$$\begin{aligned}
&d(\omega\wedge\rho) = d(f_0 g_0)\wedge df_1\wedge\cdots\wedge df_k\wedge dg_1\wedge\cdots\wedge dg_l\\
&= g_0 df_0\wedge df_1\wedge\cdots\wedge dg_l + f_0 dg_0\wedge df_1\wedge\cdots\wedge dg_l\\
&= (d\omega)\wedge\rho + (-1)^k\omega\wedge d\rho.
\end{aligned}$$

最后，为证明3)，只需对$f\in\mathscr{F}(M)$核验 $d\circ df = 0$。但在细图中有 $df(u) = \sum_i Df(u)\cdot e_i dx^i$，故得：

$$d\circ df(u) = D\circ Df(u)\cdot\sum_{i,j}(e_i,e_j)dx^i\wedge dx^j$$

$$= D^2f(u)\sum(e_i,e_j)(dx^i\wedge dx^j + dx^j\wedge dx^i) = 0.$$

这里用到性质$D^2f\in\mathscr{L}_s^2(E,R)$，即

$$D_iD_jf(u)(e_i,e_j) = D_jD_if(u)(e_j,e_i).$$

定理证毕。

推论1　设$\omega\in\Omega^k(U)$，U为E中开集，则有：

$$d\omega(u)(e_0,\cdots,e_k) = \sum_{i=0}^k(-1)^i D\omega(u)e_i(e_0,\cdots,\widehat{e_i},\cdots,e_k),$$

其中$\widehat{e_i}$表示e_i应去掉；即$(e_0,\cdots,e_{i-1},e_{i+1},\cdots,e_k) = (e_0,\cdots,\widehat{e_i},\cdots,e_k)$；在上式中还把$TU$中元$(u,e)$简记为$e$。

证　只需核验由上式右边定义的d具定理 3 中性质1)—3)，再利用唯一性。核验过程与定理 3 的证明过程完全类似。

为书写方便，以后换粗体$\mathbf{d}$为通常的d。

定义7 设$F:M\to N$为流形间的C^∞映射。对$\omega\in\Omega^k(N)$定义由F引出的拖射F^*如下：

$$F^*:\Omega^k(N)\to\Omega^k(M);\ F^*\omega(m)=(T_mF)^*\circ\omega\circ F(m),\quad m\in M.$$

特别若$g\in\Omega^0(N)$，则$F^*g=g\circ F$。若F^{-1}也属C^∞，定义推射

$$F_*:\Omega^k(M)\to\Omega^k(N);\ F_*=(F^*)^{-1}=(F^{-1})^*.$$

定义8 若$d\omega=0$，微分型式$\omega\in\Omega^k(E)$称为**闭的**；若存在$\alpha\in\Omega^{k-1}(E)$，使$\omega=d\alpha$，则ω称为**正合的**。

定理8 1）每个正合型式为闭的。

2）（Poincaré引理）若ω为光滑的闭型式，则对每点$m\in M$，存在邻域U，使$\omega|_U\in\Omega^k(U)$为正合的。

证 因$d^2=0$，1)是显然的。为证2)，不妨取U为含点$0\in E$的球，而在m的局部坐标下考虑。在R上构造R线性映射H：$\Omega^k(U)\to\Omega^{k-1}(U)$，使$d\circ H+H\circ d$为$\Omega^k(U)$上恒等映射。由$d\omega=0$引出$d(H\omega)=\omega$，即可得2)。对$e_1,\cdots,e_k\in E$，定义

$$(H\omega(u))(e_1,\cdots,e_{k-1})=\int_0^1 t^{k-1}(\omega(tu))(u,e_1,\cdots,e_{k-1})dt,$$

由推论1有

$$dH\omega(u)\cdot(e_1,\cdots,e_k)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}D[H\omega(u)]\cdot e_i(e_1,\cdots,\widehat{e_i},\cdots,e_k)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\int_0^1 t^{k-1}\omega(tu)(e_i,e_1,\cdots,\widehat{e_i},\cdots,e_k)dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\int_0^1 t^k[D\omega](tu)e_i(u,e_1,\cdots,\widehat{e_i},\cdots,e_k)dt,$$

由于ω光滑且对$t\in[0,1]$有界，D和$\int$的交换是容许的。但由推论 1 知

$$Hd\omega(u)(e_1,\cdots,e_k)=\int_0^1 t^k d\omega(tu)(u,e_1,\cdots,e_k)dt$$

$$=\int_0^1 t^k(D\omega)(tu)\cdot u(e_1,\cdots,e_k)dt$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\int_0^1 t^k D\omega(tu)e_i(u,e_1,\cdots,\widehat{e_i},\cdots,e_k)dt.$$

上式右边第二项和正好与前式右边第二项和抵消，故得

$$[(dH)\omega(u)+Hd\omega(u)](e_1,\cdots,e_k)$$

$$=\int_0^1 t^{k-1}k\omega(tu)(e_1,\cdots,e_k)dt+\int_0^1 t^k D\omega(tu)u(e_1,\cdots,e_k)dt$$

$$=\int_0^1\frac{d}{dt}[t^k\omega(tu)(e_1,\cdots,e_k)]dt=\omega(u)\cdot(e_1,\cdots,e_k),$$

故所需H存在，于是2)得证。

若不要求ω光滑，则闭型式而非正合型式的例是

$$\omega=\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

定义9 对流形M上的闭k型式引进等价类。若二闭k型式ω及ω'的差为正合的，即若$\omega-\omega'=d\theta$，即称此二型式为**上同调的**，记作$\omega\sim\omega'$。上同调显然作成等价关系。记所有上同调等价类的集为$H^k(M)$，它显然作成加群，而称为M上的k**次上同调群**。

注1 下面引述有关上同调群的一些结果：

1） 若$k>\dim M$，则$H^k(M)=\{0\}$；

2） $H^0(M)$的阶数等于M的连通分集的个数；

3） 若$k>0$，则$H^k(R^n)=\{0\}$；

4） $\dim H^k(S^n)=\begin{cases}1, & k=0,n\\ 0, & \text{其它情形}\end{cases}$，$S^n$为$n$维单位球面。

1.6.4 可定向流形

定义10 流形M上的单位分解是集$\{(U_i,\varphi_i,g_i)\}$，而满足下列要求：

$PU1$ $\{(U_i,\varphi_i)\}$为M上图集，$\{U_i\}$为M的局部有限开覆盖；

$PU2$ $g_i\in\mathscr{F}(M)$，$g_i\geqslant 0$，$\mathrm{supp}\,g_i=Cl\{x:g_i(x)\neq 0, x\in M\}$为紧集并含于$U$，这里$Cl\{\cdot\}$表示集$\{\cdot\}$的闭包；且对每一点$m\in M$，有$\sum\limits_{i=1}^{\infty}g_i(m)=1$。$\mathrm{supp}\,g$称$g$的台。

定理9 任一流形M上总存在单位分解。

证 因流形M为次紧空间（见1.1.4），故总存在图集$\mathscr{A}$，容许局部有限的加细$\{(V_i,\varphi_i)\}$。对任一点$m\in M$，总可取细图(U,φ)，使$U'=\varphi(U)\subset R^n$含以$\varphi(m)=0$为心、2为半径的球（必要时经平移及放大，总可达到目的）。记

$$\theta(x)=\begin{cases}\exp\{-(1-|x|^2)^{-1}\}, & |x|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2<1;\\ 0, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$$

作函数

$$h(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1;\\ \theta(|x|-1), & 1<|x|<2;\\ 0, & |x|\geqslant 2.\end{cases}$$

显然，函数 $h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ 对充分小的 $\varepsilon>0$ 具任意小的紧台，于是 $h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\circ\varphi^{-1}=f(m)$ 为 $\mathscr{F}(M)$ 中元，且具紧台。因此，对每个 i 有 $f_i\in\mathscr{F}(M)$，$\operatorname{supp} f_i\subset V_i$。令

$$g_i(m)=f_i(m)/\sum_i f_i(m),\quad i=1,2,\cdots,$$

即得所求单位分解(注意由于 $\{V_i\}$ 的局部有限性，对每个固定的 $m\in M$，$\sum_i f_i(m)$ 实际是有限和)。

定义11 n 维流形 M 上的**体元**是 n 型式 $\Omega\in\Omega^n(M)$，而使 $\Omega(m)\neq 0$，$m\in M$。若 M 上存在体元，即称 M 为**可定向流形**。对二体元 Ω_1 及 Ω_2，若存在 $f\in\mathscr{F}(M)$，使对所有 $m\in M$ 有 $f(m)>0$ 且 $\Omega_1=f\Omega_2$，即称此二体元为**等价的**。它显然作成等价关系。M 上体元的一个等价类 $[\Omega]$ 称为 M 的一种**定向**。由**标准体元**

$$\Omega_0\equiv dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

所在等价类确定的定向，称为 M 的**正定向** $[\Omega_0]$。定向流形 $(M,[\Omega])$ 是可定向流形 M 附以**定向** $[\Omega]$。若 $[\Omega]$ 为 M 的一种定向，则 $[-\Omega]$ 称为其**逆定向**。特别，$[\Omega_0]$ 的逆定向称为**负定向**。

定理10 设 M 为 n 维流形，则有：

1) 当且仅当 $\Omega^n(M)$ 作为 $\mathscr{F}(M)$ 为一维时，M 可定向(回忆环 $\mathscr{R}$ 上的模 M 与域 K 的向量空间 E 的区别是：环 $\mathscr{R}$ 不必有单元)；

2) 当且仅当 M 有一图集 $\mathscr{A}=\{(U_i,\varphi_i)\}$，其中 $\varphi_i: U_i\to U_i'\subset R^n$，使迭合映射 $\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}$ 的 Jacobi 行列式取正值时，M 可定向。

证 1) 设M可定向，故有体元Ω。取$\Omega^n(M)$中任一其它体元Ω'。因$\Omega^n(M)$的纤维为一维的，可由

$$\Omega'(m)=f(m)\Omega(m)$$

定义映射$f:M\to R$。应证$f\in\mathscr{F}(M)$。在局部坐标下，

$$\Omega'(m)=\omega'_{i_1\cdots i_n}(m)\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_n};$$

$$\Omega(m)=\omega_{i_1\cdots i_n}(m)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_n},$$

但对所有$m\in M$，$\omega_{i_1\cdots i_n}(m)\neq 0$,故

$$f(m)=\omega'_{i_1\cdots i_n}(m)/\omega_{i_1\cdots i_n}(m)\text{属}C^\infty。$$

反之，若$\Omega^n(M)$由Ω张成，则对所有$m\in M$，因每个纤维为一维的，确有体元$\Omega(m)\neq 0$。

2) 设$\{(U_i,\varphi_i)\}$为图集，$\varphi_i(U'_i)=U_i\subset M$，$U'_i\subset R^n$。必要时取缩射，可认为$U'_i$是连通集。当$M$可定向时，标准体元$\Omega_0$可作为$\Omega^n(U)$中基底，故对任一体元$\Omega$，由$\varphi$引出的拖射$\varphi^*$使

$$\varphi_i^*:\Omega^n(U)\to\Omega^n(U');\ \varphi_i^*\ \Omega=f_i\Omega_0=f_i dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

必要时作反射，可认为$f_i(u')>0$，$\forall u'\in U'_i$。但连通集上处处不为零的体元总为正或负，故有：

$$(\varphi_i\circ\varphi_j^{-1})^*\Omega_0=\varphi_j^{-1*}\circ\varphi_i^*\ dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=\varphi_j^{-1*}(f_i\Omega_0)$$
$$=(\varphi_j)_*f_i\Omega_0=f_i\circ\varphi_j^{-1}f_j\Omega_0.$$

这里用到1.5.4定义 9 中推射$\varphi_*=(\varphi^*)^{-1}=(\varphi^{-1})^*$性质。另一方面，据定义 7 有：

$$F^*\Omega_0=DF\cdot dx^1\wedge DF\cdot dx^2\wedge\cdots\wedge DF\cdot dx^n,$$

故由定理 5 中行列式定义知(注意f_i,f_j,φ_j^{-1}为正)：

$$\det(D(\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}))=f_i\circ\varphi_j^{-1}\circ f_j>0.$$

反之，设$\{(U_i,\varphi_i)\}$为具给定性质的图集，$\{(U_i,\varphi_i,g_i)\}$为相应的单位分解。令

$$\Omega_i = \varphi_i^* \ \Omega_0 \in \Omega^n(U_i); \quad \widetilde{\Omega}_i(m) = \begin{cases} g_i(m)\Omega_i(m), & m \in U_i; \\ 0, & m \notin U_i, \end{cases}$$

因supp $g_i \subset U_i$，知$\widetilde{\Omega}_i \in \Omega^n(M)$。取

$$\Omega = \sum_i \widetilde{\Omega}_i,$$

由于右边的和是局部有限和，故$\Omega \in \Omega^n(M)$。最后，因迭合映射有正的Jacobi行列式，故在$U_i \cap U_j$上$\Omega_j \neq 0$且

$$\begin{aligned} \Omega_j = \varphi_j^* \ \Omega_0 = \varphi_i^* \ \circ (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})^* \Omega_0 = \varphi_i^* \ [\det(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) \Omega_0] \\ = [\det(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) \circ \varphi_i] \varphi_i^* \ \Omega_0 \neq 0, \end{aligned}$$

这里用到易于核验的公式

$$\varphi^*(f\Omega) = [f \circ \varphi]\varphi^*\Omega.$$

因$\sum_i g_i \equiv 1$，故对任何$m \in M$，有$\Omega(m) \neq 0$，即M可定向。

下面介绍斜称流形或辛流形。近年来，在力学、物理学中常用到这种流形。

定义12 设E为有限维实向量空间，$\omega \in T_2^0(E) = \mathscr{L}^2(E, R)$。若对所有的$e_2 \in E$，由$\omega(e_1, e_2) = 0$可得$e_1 = 0$，即称$\omega$为**非退化型式**。$2n$维空间$E$上的非退化2-型式$\omega \in \Omega^2(E)$称为**斜称型式**(或音译为**辛型式**，直译为**混杂型式**)。组合(E, ω)称为**斜称向量空间**。若(E, ω)及(F, ρ)为二斜称空间，线性映射f：$E \to F$若使$f^*\rho = \omega$，即称为**斜称映射**。对(E, ω)可由

$$\Omega_\omega = (-1)^{n(n-1)/2} \omega^n / n!$$

定义$2n$维空间E上的一种定向。

定理11 设E为n维实向量空间，则有

1） 若$\omega \in \mathscr{L}_a^2(E, R)$，则存在$E$的基底$\hat{e} = (e_1, \cdots, e_n)$

及对偶基底 $\widehat{e^*}=(\alpha^1,\cdots,\alpha^n)$，使

$$\omega=\sum_{i=1}^{m}\eta_i\alpha^i\otimes\alpha^i,\quad \eta_i=\pm1,\ m\leqslant n;$$

2) 若$\omega\in\Omega^2(E)=\mathscr{L}_a^2(E,R)$，则存在对偶基底组$\widehat{e}$及$\widehat{e^*}$，使

$$\omega=\sum_{i=1}^{r}\alpha^i\wedge\alpha^{i+r},\quad 2r\leqslant n.$$

1)中m及2)中$2r$称为相应ω的秩。

证 利用任意对偶基底组，总可记

$$\omega=\sum_{i,j}\omega_{ij}\alpha^i\otimes\alpha^j,\quad \omega_{ij}=\omega(e_i,e_j),$$

根据线性代数中关于二次型标准形式的讨论及外积的性质，即知定理真。

定理12 设$\omega\in\Omega^2(E)$，则ω为非退化型式的充要条件是：E具偶数维$2n$，且$\omega^n=\omega\wedge\cdots\wedge\omega$为$E$上体元。

证 设ω为非退化的。选E的基底使

$$\omega=\sum_{i=1}^{r}\alpha^i\wedge\alpha^{i+r},$$

因ω非退化，其秩应等于E的维数，故 $\dim E=2r$，而为偶数。其次，用数学归纳法可证明

$$\omega^k=\sum_{j_1,\cdots,j_k=1}^{r}\alpha^{j_1}\wedge\alpha^{j_1+r}\wedge\cdots\wedge\alpha^{j_k}\wedge\alpha^{j_k+r}.$$

当$k=r$时，把α^{j_1+r}后移$r-1$次，α^{j_2+r}后移$r-2$次，$\cdots$，$\alpha^{j_{r-1}+r}$

后移1次，知所得(-1)的幂次为$1+2+\cdots+(r-1)=\frac{r(r-1)}{2}$，

此外，$(j_1,\cdots,j_r)$与$(j_1+r,\cdots,j_r+r)$的调整排列相同，故得

$$\omega^r=r!(-1)^{r(r-1)/2}\alpha^1\wedge\alpha^2\wedge\cdots\wedge\alpha^{2r},$$

而为体元。反之，若ω^n为体元，则ω的秩为$2n$。

定义13 设M为流形，$\omega\in\Omega^2(M)$。若对每点$m\in M$；2-型式$\omega(m)$为非退化的，即称ω为**M上的非退化2型式**。M上的非退化的闭2型式$\omega\in\Omega^2(M)$称为**斜称型式或斜称结构**。**斜对流形**(M,ω)是流形M附以斜称结构ω。

应用中常遇到的斜称流形是流形M的余切丛T^*M。在向量丛细图下，可引进如下的1型式及2型式：

$$-\theta_0=\sum_{j=1}^{n}\xi_j dx_j;\qquad \omega_0=-d\theta_0=\sum_{j=1}^{n}d\xi_j\wedge dx_j$$

分别称为余切丛上的**第一和第二典则型式**，并以ω_0作为余切丛上的斜称结构。

1.6.5 交点与绕数

流形N的子流形M，Q若使$\dim M+\dim Q=\dim N$，称M及Q具**互补维数**。若M不N即M贯截于N，则互补维数条件使交集$M\cap Q$为零维流形。因由1.5.3推论3有

$$\operatorname{codim}(M\cap Q)=\operatorname{codim}M+\operatorname{codim}Q=\dim N.$$

若还假定M及Q都是闭集且至少有一(例如M)是紧集，则$M\cap Q$为有限点集*)，其点数称为M与Q的**交点数**，记作$\#(M\cap Q)$。在一般情形，须先引进如下概念。

*) 若有无限个交点，则必有极限点，仍为交点，于是M及Q在此点相切，而非贯截。

定义14 设$I=[0,1]\subset R^1$。流形M及N间的光滑映射f_0，f_1称为**同伦的**，若存在光滑映射$F:M\times I\to N$，使

$$F(x,0)=f_0(x),\quad F(x,1)=f_1(x),$$

F称为f_0及f_1的**同伦**．它是M到N的光滑映射间的等价关系，相应的等价类称**同伦类**。

定义15 设M为紧流形，不必含于流形N；$f:M\to N$为光滑映射并贯截于N的闭子流形Q，且$\dim M+\dim Q=\dim N$，则$f^{-1}(Q\cap f(M))$为M的零维子流形，并为有限集。称$f^{-1}(Q\cap f(M))$在mod2下的点数(奇或偶)为映射f与Q在mod2下的交点数，记作$I_2(f,Q)$。对任意光滑映射$g:M\to N$，选同伦于g而贯截于Q的任一光滑映射$f:M\to N$，定义

$$I_2(g,Q)=I_2(f,Q).$$

定理13 设f_0，f_1：$M\to N$为同伦的光滑映射，且都贯截于$Q\subset N$，M及Q如定义15所设，则有：

$$I_2(f_0,Q)=I_2(f_1,Q).$$

证 设$F:M\times I\to N$为f_0及f_1的同伦。因f_0及f_1都贯截于Q，可认为F亦然．令边界

$$\partial(M\times I)=M\times\{0\}\cup M\times\{1\},$$

且$F(M\times I)\subset N$的边界∂F沿$M\times\{0\}$为f_0，沿$M\times\{1\}$为f_1，即$\partial F\pitchfork Q$，故$F^{-1}(Q\cap f(M))$为$M\times I$的一维子流形，且边界为：

$$\partial F^{-1}(Q\cap f(M))=F^{-1}(Q\cap f(M))\cap\partial(M\times I)$$
$$=f_0(Q\cap f(M))\times\{0\}\cup f_1^{-1}(Q\cap f(M))\times\{1\}.$$

据微分拓扑学的讨论，具边界的一维连通紧流形必微分同胚于$[0,1]$或S^1，故$\partial F^{-1}(Q\cap f(M))$有偶数个点，于是

$$\#f_0^{-1}(Q\cap f(M))=\#f_1^{-1}(Q\cap f(M))\pmod 2.$$

定理13使定义15有确切意义。

推论2 若$g_0, g_1: M \to N$为同伦的光滑映射，则

$$I_2(g_0, Q) = I_2(g_1, Q).$$

特别若M为N的紧子流形，Q为N的闭子流形，且M与Q具互补维数，定义M与Q在mod2下的交点数$I_2(M, Q) = I_2(i, Q)$，这里$i: M \hookrightarrow N$为嵌入映射。若$M \pitchfork Q$，则$I_2(M, Q)$正是$\#(M \cap Q)$ (mod2)。

定理14 设M为紧流形，N为连通流形，$f: M \to N$为光滑映射。若$\dim M = \dim N$，则$I_2(f, \{y\})$对所有$y \in N$为相同的。这个数称为f在mod2下的**度数**(degree)，记作$\deg_2 f$。

证 对任意点$y \in N$，必要时取f的同伦映射，可认为f贯截于$\{y\}$，而y为f的正则值。存在y的邻域U，使原象$f^{-}(U)$为不相交集$V_1, \cdots, V_m$的并，这里V_i为M中开集，被f微分同胚地映为U。于是对所有点$z \in U$，有$I_2(f, \{z\}) = m$(mod2)。因此，由$y \to I_2(f, \{y\})$在N上定义的函数局部地为常数。但因N为连通集，故全局为常数。

作为计算$\deg_2 f$的例，取复平面中映射$z \to z^n$。当n为偶数时，$\deg_2(z^n) = 0$；当n为奇数时，$\deg_2(z^n) = 1$。

推论3 同伦映射有相同的度数。

mod2下的交点数当然缺乏精确性，为此引进定向交点数。

定义16 设M, N, Q为定向流形，M为紧集，Q为N的闭子流形，$\dim M + \dim Q = \dim N$，$f: M \to N$为光滑映射且贯截于Q，则$f^{-1}(Q \cap f(M))$为有限集，对其中每点，由原象的定向赋以定向数± 1。定义**定向交点数**$I(f, Q)$为这些定向数的和。

定义17 设M为定向流形，N为连通定向流形，$\dim M = \dim N$。定义任一光滑映射$f: M \to N$的度数为$\deg(f) = I(f,$

$\{y\})$，y为N中任一点。

定义18 设M为l维紧定向流形，$f: M \to R^{l+1}$，则f对任一点$z \in R^{l+1} \setminus f(M)$的绕数定义为$W(f, z) = \deg(u)$，这里

$$u(x) = \frac{f(x) - z}{\|f(x) - z\|}: M \to S^l.$$

下面不加证明，引述几个结果。

定理15 同伦映射有相等的定向交点数。

定理16 设c为$R^2 \setminus \{0\}$中光滑曲线，ω为$R^2 \setminus \{0\}$中任一闭1型式，则有

$$\oint_c \omega = W(c, 0) \oint_{S^1} \omega,$$

S^1为单位圆周。

关于1.4—1.6三节，进一步的参考书是：

R. Narasimhan, *Analysis on Real and Complex Manifolds*, Masson et Cie, Paris, 1973.

J. Dieudonné, *Treatise on Analysis*, Ⅱ, Academic Press, New York, 1970.

V. I. Arnold, *Mathematical Foundations of Classical Mechanics*, Springer Verlag, Berlin, 1978.

R. O. Wells, *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Prentice Hall, New Jersey, 1973.

Y. Choquet-Brnhat et al., *Analysis, Manifolds and Physics*, North-Holland Pullishing Company, Amsterdam 1977.

I. M. Singer and J. A. Thorpe, *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, 1967, Scott, Foresman and Company, Dallas, TX.

RL. Bishop, R. J. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Acadersic Press, New Yoyk, 1964.

本章主要参考书

Köthe, G., *Topologische Lineare Räume, I*, Springer-Verlag, Berlin, 1960.

Abraham, R. and Marsden, T. E., *Foundations of Mechanics*, 1967, *chap*. 2-4; 2*nd ed*., Beujamin, New York, 1974.

Guillemin, V. and Pollack, A., *Differential Topology*, Prentice Hall, New Jersey, 1974.

2. 广义函数

广义函数(简称广函)近年来得到多方面的应用。本章利用局部凸空间理论来奠定广函理论；重点是广函的乘、除法问题。

2.1 对偶性

广函有多种定义方式；最常用的一种，是把它理解为某些函数空间(检试空间)上的连续线性泛函。所以先考察局部凸空间的共轭空间的一些性质。

2.1.1 强与弱拓扑

定理1 设E为Fréchet空间，则E中任一个桶（闭、凸、

心实称的吞吸集)含E中一个零元邻域。

证 因桶B为吞吸集，故$\bigcup_{m=1}^{\infty} mB$覆盖$E$。但$E$作为完备度量空间是第二纲集。事实上，若不然而设$E$可表为可列个疏集$\{M_j\}$的和：$E=\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$。以任一点$a\in E$为心作半径为1的闭球$S(a,1)=\{x:\rho(x,a)\leqslant 1\}$，这里$\rho$为$E$中度量。因$M_1$为疏集，在$S(a,1)$中存在闭球$S(a_1,r_1)$，$r_1<\frac{1}{2}$，不含$M_1$中的点。同样，因$M_2$为疏集，在$S(a_1,r_1)$中存在闭球$S(a_2,r_2)$，$r_2<\frac{1}{2^2}$，不含$M_2$中的点。如此构造下去，得一列单降闭球

$$S(a_1,r_1)\supset S(a_2,r_2)\supset\cdots\supset S(a_n,r_n)\supset\cdots$$

且$r_n\to 0(n\to\infty)$，$S(a_n,r_n)$不含$M_1,\cdots,M_n$中点。由于E是满足分离公理T_2的完备空间，这个闭球列有唯一的交$a_0\in E$. 但根据上述构造，知$a_0\notin\bigcup_{j=1}^{\infty} M_n$。这就与假设$E=\bigcup_{j=1}^{\infty} M_n$不符。故$E$不能为第一纲集。由$E=\bigcup_{m=1}^{\infty} mB$知$B$不是疏集，不然每个$mB$都是疏集。故$\overline{B}=B$含内点$x_0$，并含$x_0$的某个开邻域$x_0+U$，这里$U$是$E$中某零元邻域，且不妨认为$U$是心实称的。由$B$的心实称性知有：$-x_0-U=-x_0+U\subset -B=B$. 但$B$为凸集，故$\frac{1}{2}(x_0+U)+\frac{1}{2}(-x_0+U)=U\subset B$。定理证毕。

定义1 设E为拓扑线性空间，集

$$V(A,\varepsilon)\equiv\{f:|f(A)|<\varepsilon\}$$

称为E'中零元的强邻域，这里A为E中任一有界集，ε为任意正数。

可核验1.1.1中的邻域公理成立，故构成拓扑，称为E'上**的强拓扑**。于是强有界性、强闭包、强收敛性、强连续性等概念可相应引出。

定理2　若E满足第一可列公理，则E'在强拓扑下为完备空间。

证　设$\{f_n\}\subset E'$为强基本列，则对任一点$x\in E$，$\{f_n(x)\}$为基本数列。记$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，则$f$为线性泛函；且对每个有界集$A\subset E$，因$\{|f_n(A)|\}$为有界数列，而有$|f(A)|<\infty$，故$f$为有界泛函。据1.3.1定理2，知$f$为连续线性泛函，即$f\in E'$，且显然在强拓扑下有$f_n\to f$。故$E'$为强完备的。

推论1　设E为拓扑线性空间，则E'中集B'为强有界的，当且仅当对E中每个有界集A，B'在A'上为有界的，即

$$|B'(A)|\equiv\sup_{f\in B'}|f(A)|<\infty. \qquad (1)$$

证　设B'为强有界集，则对E'中零元的任一强邻域$V(A,1)$，有某个$\rho>0$使$B'\subset\rho V(A,1)$，这表明$|B'(A)|<\rho$。反之，若对E中任一有界集A，(1)总成立，则对E'中零元的任一强邻域$V=V(A,\varepsilon)$，当$\mu>\frac{|B'(A)|}{\varepsilon}$，即有$B'\subset\mu V$，故$B'$为强有界集。

推论2　若拓扑线性空间E满足第一可列公理，则E'中每个强有界集B'在E的某零元邻域上有界。

证　设若不然．则对E中零元的可列邻域基$U_1\supset U_2\supset\cdots$，存在点列$\{x_n\}$，$x_n\in U_n$，及列$\{f_n\}\subset B'$，可使$|f_n(x_n)|\to\infty$．但$\{x_n\}$为有界集，所得矛盾表明推论成立。

定理3　设E为局部凸可度量化空间，则E'中集B'为强有界集，当且仅当：对某个k，$B'\subset E'_k$且按E'_k中范有界。

注1 记E中半范$p_k(x)$的核(零化空间)为：

$$K_k \equiv \{x: x\in E, \ p_k(x)=0\}, \quad k=1,2,\cdots$$

则商空间$\widehat{E}_k = E/K_k$为Banach空间，而以$\|x\|_k = p_k(\widehat{x_k})$为范，这里$\widehat{x_k}$为$x$在$\widehat{E}_k$中的等价类。记$\widehat{E}_k$的对偶空间为$E'_k$，其中的范$\|f\|_k = \sup\limits_{\|x\|_k=1}|f(x)|$.

证 若$B'\subset E'_k$且依其中范有界，则在E的零元邻域$U=\{x: x\in E, \|x\|_p\leqslant 1\}$上，$B'$为有界的。故$B'$在$E$的任一有界集上有界，据推论1，$B'$为强有界集。反之，若$B'$为强有界集，则由推论2，$B'$在$E$的某零元邻域$V=\{x: \|x\|_k<\varepsilon\}$上有界。设$|B'(V)|<M$，则对每个$f\in B'$，有$B'\subset E'_k$且$\|f\|_k<M/\delta$.

定义2 设E为拓扑线性空间。E中弱拓扑由

$$V\equiv V(x_1,\cdots,x_m,\varepsilon)\equiv\{f: |f(x_j)|<\varepsilon, \ j=1,\cdots,m\}$$

确定的零元邻域基构成，其中m为任一正整数，$x_1,\cdots,x_m$为E中任意m个点，ε为任意正数。由此可引出弱有界性弱收敛性等概念。

显然，E'中弱拓扑粗于强拓扑。弱收敛性特别表明：对任一$x\in E$，有$f_n(x)\to f(x)$。

定理4 设E为Fréchet空间，则E'中弱有界集也是强有界集。

证 设B'为E'中任一弱有界集。记

$$F=\{x: x\in E, \ |f(x)|\leqslant 1, \ \forall f\in B'\}$$

可核验F为桶。据定理1，F含E中某零元邻域U。因B'在U上有界且U为吞吸集，故B'在E的任一有界集上有界。由推论1知B为强有界集。

推论3 E'中集B'为弱有界集，当且仅当对每一点$x\in E$有

$$\sup_{f\in B'}|f(x)|<\infty.$$

推论4 设E为F空间，则E'中弱收敛列$\{f_n\}$为强有界集。

定理5 设E为F空间，则E'关于弱拓扑为完备空间。

证 设$\{f_n\}$为E'中弱基本列，则$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$对任一点$x\in E$存在。据定理4，对任一有界集$A\subset E$，$|f_n(A)|<C$。故$|f(A)|<C$。这表明$f$连续。显然在弱拓扑下有$f_n\to f\in E'$。定理得证。

定义3 拓扑线性空间E中的强拓扑由如下确定的零元强邻域

$$V\equiv V(B',\varepsilon)\equiv\{x: x\in E,\ |f(x)|<\varepsilon,\ \forall f\in B'\}$$

构成，这里B'为E'中任一强有界集，ε为任意正数；E中弱拓扑由零元的弱邻域

$$W\equiv W(f_1,\cdots,f_m;\varepsilon)\equiv\{x: x\in E,\ |f_j(x)|<\varepsilon,\ j=1,\cdots,m\}$$

所确定，这里m为任意正整数，$f_1,\cdots,f_m$为E'中任意m个元，ε为任意正数。

定理6 设E为F空间，则E中强拓扑与原有局部凸拓扑等价。

证 E中每个零元邻域$V=\{x: \|x\|_k<\varepsilon\}$也是强邻域。事实上，若$x\in V$，则对集

$$B'=\{f: f\in E_k',\ \|f\|_k\equiv\sup_{\|x\|=1}|f(x)|=1\}$$

中任何f有$|f(x)|<\varepsilon$，故$V\supset\{x: x\in E,\ |f(x)|<\varepsilon,\ \forall f\in B'\}$，而为$E$中零元的一个强邻域。反之，设$U$是$E$中零元的一个强邻域，则对$E'$中某强有界集$B_1'$，有：

$$U=\{x: x\in E,\ |f(x)|<\varepsilon,\quad \forall f\in B_1'\},$$

据定理 3，$B_1'\subset E_k'$且$\|f\|_k<C$，$\forall f\in B_1'$。故U包含集

$$U_0=\{x: x\in E,\ |f(x)|<\frac{\varepsilon}{C},\ \forall f\in E_k',\ \|f\|_k=1\}$$

而U_0等同于E中零元邻域 $\{x: \|x\|_k<\frac{\varepsilon}{C}\}$.

定理7 F空间E中的强及弱有界性重合一致。

证 强有界集显然为弱有界集。反之，设A为E中弱有界集，则当 $\rho>0$ 充分小时，ρA含于E中零元的任一给定弱邻域中。故对任一$f\in E'$及所有的$x\in E$，有$|f(x)|<C$。特别对任一个$f\in E_k'$，有$|f(A)|<\infty$，故A在每个$\widehat{E}_k$中为有界集。据定理 3 知A为强有界集。

推论5 F空间E中的弱收敛列为强有界集。

2.1.2 FM空间

定理8 在FM 空间E中，强及弱收敛性重合一致。

证 因F空间满足第一可列公理，收敛性可由序列表述。显然，强收敛列必弱收敛。反之，设列 $\{x_n\}$ 在E中弱收敛于零。据推论 5 知$\{x_n\}$为强有界集。回忆FM 空间中强有界集为相对紧集(见1.2.4)，故 $\{x_n\}$ 必有子列强收敛随之弱收敛于某$x\neq 0$，而与假定不符。因此$\{x_n\}$必强收敛于零。

推论6 FM空间E在弱拓扑下是完备的。

证明类似于定理 8 。

定理9 设E为FM 空间，则E'中的强及弱收敛性一致。

证 E'中强收敛性显然包含弱收敛性。反之，设 $\{f_n\}\subset E'$弱收敛于零，故对任一点$x\in E$，$f_n(x)\to 0$。须证明：对E

中任一有界集中的点x，$f_n(x)$一致收敛于零．设若不然，则在E中某有界集A中存在点列$\{x_n\}$，使对某$\varepsilon>0$有$|f_n(x_n)|>\varepsilon$．因$\{x_n\}$为有界集且E为FM空间，故有子列$\{x_{n'}\}$强收敛于某点$x\in E$。于是对E'中任一有界集B'中的f，一致有$f(x_{n'}-x)\to 0$。特别取$B'=\{f_{n'}\}$，有

$$f_{n'}(x_{n'})=f_{n'}(x_{n'}-x)+f_{n'}(x)\to 0 \quad (n'\to\infty)$$

而得矛盾。故E'中弱收敛性也包含强收敛性。

定理10　设F空间E为可分的(即E含可列稠集)，则E'中每个有界集为弱列紧的(即每个序列有子列，收敛于E'中某元)。

证　设$\{x_n\}$为E中可列稠集。对给定的任一有界无穷集$B'\subset E'$，用对角化方法可选出无穷列$\{f_n\}$，使对每个x_m收敛．据定理3，对每个k有$\|f_n\|_k<C$，但因$\{x_n\}$为E中稠集，故$\{f_n\}$在E上收敛。现在证明$\{f_n\}$的弱极限f属于E'。事实上，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$对每个$x\in E$存在。据推论4知，对每个有界集$A\subset E$，有$|f_n(A)|<C$。故$|f(A)|<C$。于是$f$为有界线性泛函。据1.3.1定理2，$f$为连续的，即$f\in E'$。因此，$B'$为弱列紧的。

定理11　FM空间E为可分空间。

证　若所有$\widehat{E}_k$(见注1)为可分的，则在其中取可列稠集S_k，其并$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}S_k$即为$E$的可列稠集。事实上，对任一点$x\in E$，存在$x_k\in S_k$，使$\|x_k-x\|_k<\dfrac{1}{k}$，$k=1,2,\cdots$，且显然有$x_k\to x$．故只须证每个$\widehat{E}_k$为可分空间．用反证法，不妨设$\widehat{E}_1$不是可分空间。则在$\widehat{E}_1$中存在有界的、非可列的无穷集$N$，使对$N$中任

二点x及y，都有$\|x-y\|_1 \geqslant \varepsilon > 0$。因$E$含于球$\|x\|_1 < m$ $(m=1, 2, \cdots)$的并中，故对某个m_1，$N_1 = N \cap \{x: \|x\|_1 < m_1\}$不是可列集。同样，对某个$m_2 > m_1$，$N_2 = N_1 \cap \{x: \|x\|_2 < m_2\}$不是可列集。这样构造下去，知对每个正整数$k$，在$\widehat{E}_k$中存在有界的非可列集$N_k$。对每个$k$，取$N_k$中点$x_k$，使当$k \neq j$时，$x_k \neq x_j$，即得$E$中有界列$\{x_j\}$，而无收敛子列。这与$E$为FM空间的假定不符。故所有$\widehat{E}_k$为可分的，随之$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \widehat{E}_k$也是可分空间。

结合定理9—11，即得重要结果。

定理12 设E为FM空间，则E'中有界集在强及弱拓扑下都是相对列紧的。

2.1.3 严格归纳极限

在1.1.1中提到拓扑空间列$\{E_j\}$的严格归纳极限$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_n$，这里要求$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_j \subset \cdots$且每个$E_j$的拓扑是$E_{j+1}$中拓扑的导拓扑；$U$为$E$中零元邻域，当且仅当对每个$j$，$U \cap E_j$为$E_j$中零元邻域。现在利用对偶性考察$E$及$E'$的一些重要性质。

定理13 设E是拓扑线性空间列$\{E_j\}$的严格归纳极限。若在E中$x_n \to x$，则x及x_n同属于某个E_m且在E_m中$x_n \to x$。反之亦然。

证 不失一般性，设$x=0$。若$\{x_j\}$不属于某$E_{m'}$，则存在两个列$\{x_{j'}\}$及$\{E_{m'}\}$，$m' = m'(j')$，且j', m'都随j单增地趋于∞，使当$k' > j'$时，$x_{k'} \notin E_{m'}$，当$k' \leqslant j'$时$x_{k'} \in E_{m'}$。对每个m'，取$E_{m'}$的零元邻域$V_{m'}$，使不含点$x_{k'}(k' \leqslant j')$。于

是$V_{m'}\cap\{x_{k'}\}=\varnothing$。因$V=\bigcup\limits_{m'}V_{m'}$为$E$的零元邻域且$V\cap\{x_{j'}\}=\varnothing$，则$x_j\to 0$（在$E$中）而与假定不符。现在设$\{x_n\}\subset E_m$，$\forall m\geqslant m_0$，而证在$E_{m_0}$中$x_n\to 0$。假定不然，则在$E_{m_0}$中存在零元邻域$W_{m_0}$，而与$\{x_n\}$的某个子列不相交。为简单计，仍记这个子列为$\{x_n\}$。对$m>m_0$，设$W_m$为$E_m$的零元邻域，使$W_m=E_m\cap W_{m+1}$，$m\geqslant m_0$。因$\{x_n\}$与$W_{m_0}$不相交，故$W_m\cap\{x_n\}=\varnothing$，$m\geqslant m_0$。于是$W=\bigcup\limits_{m\geqslant m_0}W_m$为$E$中零元邻域且与$\{x_n\}$不相交。这与在$E$中$x_n\to 0$的假定不符。故$\{x_n\}$应在$E_{m_0}$中趋于零。逆命题是显然的。

定理14 设E如前。若B为E中有界集，则B含于某个E_m并在其中有界。反之亦然。

证 若B不含于某个E_m，则存在两个列$\{x_{j'}\}$及$\{E_{m'}\}$，$m'=m'(j')$，m'，j'都随j单增，使$\{x_{j'}\}\subset B$，且当$k'>j'$时，$x_{k'}\notin E_{m'}$，当$k'\leqslant j'$时，$x_{k'}\in E_{m'}$。取$E_{m'}$中零元邻域$V_{m'}$使$m'V_{m'}$不含$x_{k'}$（$k'\leqslant j'$）。于是$m'V_{m'}\cap\{x_{j'}\}=\varnothing$。集$V=\bigcup\limits_{m'}V_{m'}$是$E$的零元邻域且因

$$k'V\subset[k'\bigcup_{m'\leqslant k'}V_{m'}]\cup[\bigcup_{m'>k'}m'V_{m'}]$$

对任何整数k'，$\{x_{j'}\}$不含于$k'V$。因V为凸集，对任何λ，有界集$\{x_{j'}\}$不含于λV。这是不可能的。

现在设$B\subset E_m$，$\forall m\geqslant m_0$。若B不在E_{m_0}中有界，则对E_{m_0}的某零元邻域W_{m_0}，B不含于任何λW_{m_0}。由W_{m_0}仿照定理13的证明构造W_m，则B不含于任何λW_m中，随之不含于任何λW中，这里$W=\bigcup\limits_{m\geqslant m_0}W_m$，而与$B$在$E$中的有界性假定矛

盾，因W是E中的零元邻域。逆命题是显然的。

定理15 设E如前。若每个E_m是完备空间，则E亦然；反之，若E_j为E的闭子空间且E为完备的，则E_j是完备的。

证明仿照前两个定理。

推论7 若每个E_j满足第一可列公理，则E上线性泛函为连续的，当且仅当由在E中$x_n \to 0$有$f(x_n) \to 0$；或当且仅当f在E的每个有界集上为有界的。

定理16 设每个E_j为F空间，则E的共轭空间E'在弱拓扑下为完备空间。

证 设$\{f_n\}$为E'中弱基本列，则其极限f在每个E_j上为连续线性泛函，故$f \in E'$。事实上，对数域K中零元的任一凸邻域$N = \{y : |y| < \varepsilon\}$，集合$\{x : |f(x)| < \varepsilon, x \in E\} \cap E_j$是$E_j$的零元邻域，$j = 1, 2, \cdots$，故$\{x : |f(x)| < \varepsilon\}$是$E$的零元邻域，即$f$为$E$上连续线性泛函。

在本节最后，提一下LF空间。

定义4 设$\{E_m\}$为拓扑线性空间的单增列：

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_m \subset \cdots$$

$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$，且每个$E_j$的拓扑强于由$E_{j+1}$引出的导拓扑。在$E$中引进收敛性及有界性概念如下：

1） 在E中$x_n \to x$当且仅当：$\{x_n\}$及x属于某个E_m并在E_m中$x_n \to x$；

2） B为E中有界集当且仅当：B含于某个E_m并在E_m中有界；

而称E为$\{E_m\}$的可列并。特别若E_m都是F空间时，称E为**LF空间**。

注意在E中并未引进拓扑。但可定义其上线性映射L的有

界性及连续性如下：L连续(有界)当且仅当它在每个E_j上连续(有界)。E的对偶空间仍记为E'。在E'中可引进两种收敛性：若对每个$x\in E$有$f_n(x)\to 0$，称f_n弱收敛于零；若对E中每个有界集中的x有$f_n(x)\to 0$，则称f_n强收敛于零。E'中集B'称为弱(强)有界的，若对每个$x\in E$（每个有界集$A\subset E$），数集$\{f(x): f\in B'\}$ ($\{f(x): f\in B', x\in A\}$) 为有界的。若$E_j$都是$F$空间，则$E'$中的强及弱有界性重合一致。

定理13及14对$\{E_j\}$的可列并据定义而成立；定理15、16及推论7也保持有效。

严格归纳极限及可列并概念可推广到任意空间族$\{E_\alpha, \alpha\in I\}$的情形，$I$可为非可列无穷指标集。

2.2 检试函数与广函

2.2.1 一般性考察

以后考虑具体的函数空间，并采用如下的标准记法：

$$x\in R^n=\{(x_1,\cdots,x_n): x_j\in R,\ j=1,\cdots,n\};$$

$$\xi\in R_n=\{(\xi_1,\cdots,\xi_n): \xi_j\in R,\ j=1,\cdots,n\}$$

$$x\xi=x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n;$$

$$\zeta=\xi+i\eta=(\xi_1+i\eta_1,\cdots,\xi_n+i\eta_n)\in\mathbf{C}_n,$$

$$i=\sqrt{-1};\ z=x+iy\in\mathbf{C}^n;$$

$$|x|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2;\ |z|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2+y_1^2+\cdots+y_n^2;$$

$$\partial^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n},\ \partial_j=\frac{\partial}{\partial x_j}(j=1,\cdots,n),$$

$$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in N^n;$$

$$x^{\alpha}=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n};\qquad |\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n;$$

$$\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!;\qquad \binom{\alpha}{\beta}=\binom{\alpha_1}{\beta_1}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n};$$

$$\alpha\geqslant\beta\Longleftrightarrow\alpha_j\geqslant\beta_j(j=1,\cdots,n);$$

$$\frac{a}{b}=\left(\frac{a_1}{b_1},\cdots,\frac{a_n}{b_n}\right);\qquad \frac{ak}{b}=\left(\frac{a_1k_1}{b_1},\cdots,\frac{a_nk_n}{b_n}\right);$$

$$e^{a|bz|^k}=\exp\{a_1|b_1z_1|^{k_1}+\cdots+a_n|b_nz_n|^{k_n}\};$$

若a,b,k为标量，上述记法仍被采用，但$a_1=\cdots=a_n=a$，$b_j=b$，$k_j=k$，$j=1,\cdots,n$。

定义1 定义于开集$\Omega\subset R^n$或$\Omega\subset C^n$中的实或复值函数$\varphi(x)$或$\varphi(z)$的集Φ，若具备下述性质：

1） Φ为F空间或LF空间；

2） 若在Φ中$\varphi_j\to0$，则对每一点$x_0\in\Omega$，$\varphi_j(x_0)\to0$；即称为**检试空间**或**基本空间**，其中元称为**检试函数**。具紧台的检试函数称为**紧检试函数**。

若G为开集，记$C^m(G)$（$0\leqslant m\leqslant\infty$）为$G$中$m$次连续可微函数的集；若$G$为某开集的闭包，$C^m(G)$则表示在$G$内部有前$m$阶一致连续导数因而可连续延拓到$G$的边界$\partial G$的函数的集。特别用$C_c^m(G)$或$C_c^m(G)$（$G$为开集）记$C^m(R^n)$中台属于$G$的函数的集；$C_0^m(R^n)$则是$C^m(R^n)$中所有具紧台的函数的集。

为引进一类检试空间，考虑函数列$\{M_j(x)\}$：

$$1\leqslant M_1(x)\leqslant M_2(x)\leqslant\cdots\leqslant M_j(x)\leqslant\cdots$$

每个$M_j(x)$定义于R_n且值为有限或∞；在R^n的每一点，所有M_j同为有限或同为∞。记$R_M=\{x;M_j(x)=\infty\}$，$R_M^n=R^n\setminus R_M$；并设所有M_j在R_M^n中连续。为简单计，假定R_M^n含内点且其边界在R^n中具零Lebesgue测度。

考虑$C^\infty(R^n)$中满足下面两个要求的函数$\varphi(x)$：

$$\partial^\alpha\varphi(x)=0,\quad \forall x\in R_M,\quad |\alpha|=0,1,\cdots, \tag{1}$$

$$M_k(x)\partial^\alpha\varphi(x)\text{为}R^n_M\text{上有界连续函数。} \tag{2}$$

(2)中$0\leqslant|\alpha|\leqslant k$，$1\leqslant k<\infty$. 记这种$\varphi(x)$的全体为$K\{M_k\}$，它显然作成线性空间，其中局部凸拓扑可用范列

$$\|\varphi\|_k=\sup_{|\alpha|\leqslant k}\ \sup_{x\in R^n_M} M_k(x)|\partial^\alpha\varphi(x)|\quad (1\leqslant k<\infty) \tag{3}$$

定义。注意若R^n_M为闭集，则(1)表明$\text{supp}\varphi\subset R^n_M$。

例1 设N为R^n中紧集，用$D(N)\equiv K(N)$记$C^\infty(R^n)$中在N外恒等于零的函数的集。这时

$$M_j(x)=\begin{cases}1, & x\in N;\\ \infty, & x\notin N;\end{cases}\quad (j=1,2,\cdots) \tag{4}$$

若用$D^m(N)$记$C^m_0(N)$而赋之以范(3)

$$\|\varphi\|_m=\max_{|\alpha|\leqslant m}\max_{x\in N}|\partial^\alpha\varphi(x)|$$

的Banach空间，则$D(N)=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}D^m(N)$为$F$空间.

特别当$N=\{x:\ |x_j|\leqslant a_j,\ j=1,\cdots,n\}$时，记$K(N)$为$K(a)$.

例2 急降函数空间$\mathscr{S}(R^n)$或$S(R^n)$由

$$M_k(x)=(1+|x|)^k,\ k=1,2,\cdots \tag{5}$$

所刻划，相应的范列(3)是：

$$\|\varphi\|_m=\sup_{|\alpha|\leqslant m}\ \sup_{x\in R^n}|(1+|x|)^m\partial^\alpha\varphi(x)|,\ m=1,2,\cdots$$

以后会看到，S是FM空间。S中函数$\varphi(x)$及其各阶导数当$|x|\to\infty$时比$\frac{1}{|x|}$的任何次幂更快地趋于零：$\lim\limits_{|x|\to\infty}|x|^m|\partial^\alpha\varphi(x)|=0$。

另一类检试空间是复变元的函数空间。考虑$z\in\mathbf{C}^n$的连续函数列$\{M_j(z)\}$：

$$0<C(y)\leqslant M_1(z)\leqslant\cdots\leqslant M_j(z)\leqslant\cdots,\quad z=x+iy\in\mathbf{C}^n,$$

$C(y)$为某连续函数。检试函数是所有能延拓为整函数并使如下定义的范

$$\|\psi(z)\|_k=\sup_{z\in\mathbf{C}^n}M_k(z)|\psi(z)|\quad(1\leqslant k<\infty)\qquad(6)$$

有限的函数$\psi(z)$。记这个空间为$Z\{M_k\}$，并用范列(6)确定其中局部凸拓扑。

例3
$$M_k(z)=e^{-a|y|}(1+|z|)^k,$$

其中$a>0$，即$a_j>0, j=1,\cdots,n$. 记相应空间为$Z(a)$，它由所有指数型整函数中满足不等式

$$(1+|z|)^k|\psi(z)|\leqslant C_k e^{a|y|}\quad(0\leqslant k<\infty)\qquad(*)$$

的整函数$\psi(z)$组成，其中C_k可与ψ有关。

定理1 若检试空间Φ为含某个$K(N)$的F空间，则当列$\{\varphi_j\}$按$K(N)$中拓扑收敛于零时，它也按Φ中拓扑收敛于零。

证 若在$K(N)$中$\varphi_j\to 0$而在Φ中$\varphi_j\to\varphi^*$，则由定义1中2)知对任一点$x\in\Omega$有$\varphi^*(x)=0$，故φ^*为Φ中零元。

当Φ为F空间列$\{\Phi_j\}$作成的LF空间时，只要对某个m有$K(N)\subset\Phi_m$，定理1显然保持成立。

定义2 检试空间Φ称**可微空间**，若对任何$\varphi\in\Phi$，总有$\partial_j\varphi\equiv\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}\in\Phi$，$j=1,\cdots,n$，且映射

$$\varphi\to\partial_j\varphi$$

为由Φ到Φ的连续映射。

显然，若Φ为可微空间，则对任何多重指标α，映射$\varphi\to\partial^\alpha\varphi$为由$\Phi$到自身的连续映射。

定义3 函数a称为Φ**上乘子**，若对任一$\varphi\in\Phi$，$a\varphi\in\Phi$且映射$\varphi\to a\varphi$为由Φ到自身的连续映射。

定义4 检试空间Φ上的连续线性泛函称为Φ**上广义函数**，简称**广函**，即广函为对偶空间Φ'中元。

广函f一般不是函数，但为了强调f所作用的检试函数φ依赖于x，有时也记作$f(x)$。f对$\varphi\in\Phi$的作用表示为如下记法之一：

$$f(\varphi),\quad (f,\varphi),\quad \langle f,\varphi\rangle,\quad f[\varphi(x)],\quad \langle f(x),\varphi(x)\rangle.$$

据2.1.3中推论7及关于LF空间的说明，有以后常用到的重要准则。

定理2 $f\in\Phi'$当且仅当：f为Φ上线性泛函且对Φ中任一收敛于零的列$\{\varphi_j\}$有$f(\varphi_j)\to 0$.

若$f(x)$为局部L可积函数，即在任一有界可测集上绝对可积的函数，则由积分

$$(f,\varphi)=\int_{\Omega}f(x)\varphi(x)dx,\quad \forall\varphi\in\Phi$$

确定的广函$f\in\Phi'$称为**函数型广函**或**正则广函**。

关于广函的唯一确定问题，有如下定理。

定理3 若检试空间Φ具备下述性质：

1）对任一固定点$x_0\in R^n$，有Φ中函数φ在x_0的某邻域中不等于零；

2）对任一$\varphi\in\Phi$，积$e^{ix\xi}\varphi(x)$对所有$\xi\in R_n$仍属于Φ；

则当函数型广函$f(x)$作用于任一$\varphi\in\Phi$都取零值时，即在R^n中殆遍有$f(x)=0$。

证 据性质2)及取零值假定有

$$\int_{R^n}f(x)\varphi(x)\exp(ix\xi)dx=0,$$

这表明函数$f(x)\varphi(x)$的Fourier变换恒等于零；但由反转公式(或Fourier变换的唯一性定理，参看E.C.Titchmarsh, *Intr. to the Theory of Fourier Integrals*, §6.7, Th.120 Academic Press, New York, 1937)，知在R^n中殆遍有$f(x)\varphi(x)=0$。据性质1)知在R^n中殆遍有$f(x)\equiv 0$。

上述证明也可用于**有限阶广函**

$$(f,\varphi)=\int_{R^n}F(x)\partial^\alpha\varphi(x)dx \tag{7}$$

这里$F(x)$为某局部L可积函数。若f不能对更小的$|\alpha|=p$表如形(7)，即称f为**p阶广函**。特别**函数型广函为零阶广函**。作为一阶广函的例，可举一维情形的Dirac测度$\delta(x)$：

$$(\delta,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}[-H(x)]\varphi'(x)dx=-\int_0^\infty\varphi'(x)dx=\varphi(0),$$

$$\forall\varphi\in D(R^1),$$

其中$H(x)$为Heaviside函数：

$$H(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

事实上，(δ,φ)不能用任何局部可积函数$f(x)$表为形(7)。因若不然而设

$$(\delta,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)dx=\varphi(0),$$

则特别取$\varphi(x)\in D(R^1)$如下：

$$\varphi(x)=\varphi(x;A,b,b)=\begin{cases}A\exp\dfrac{-b^2}{b^2-r^2}, & r=|x|<b;\\ 0, & r\geqslant b;\end{cases}\quad A\neq 0 \tag{8}$$

则有：

$$(\delta,\varphi)=\int_{|x|<b} f(x)\varphi(x;A,b,b)dx=\varphi(0;A,b,b)$$
$$=Ae^{-1},$$

但当$b\to0$时上式中的积分趋于零，而$Ae^{-1}\neq0$。故δ不是函数型广函.既然它可用$H(x)$表为$-\int H(x)\varphi'(x)dx$，故确为一阶广函。

2.2.2 空间$K\{M_k\}$及$Z\{M_k\}$

考虑空间

$$\widehat{\Phi}_m\equiv\{\varphi(x): \varphi\in C^m(R^n),$$
$$\|\varphi\|_m\equiv\sup_{|\alpha|\leqslant m}\sup_{x\in R^n} M_m(x)|\partial^\alpha\varphi(x)|<\infty\}$$

在R_M上当然应理解$\varphi(x)\equiv0$。于是可证明：

引理1 $\widehat{\Phi}_m$为完备空间。

证 设$\{\varphi_j\}$为$\widehat{\Phi}_m$中基本列，即如下的列

$$|\partial^\alpha\varphi_j(x)-\partial^\alpha\varphi_k(x)|\leqslant M_m(x)|\partial^\alpha\varphi_j(x)-\partial^\alpha\varphi_k(x)|$$
$$\leqslant\|\varphi_j-\varphi_k\|_m\leqslant\varepsilon_j,\quad |\alpha|\leqslant m,\ k\geqslant j,\tag{9}$$

其中$\varepsilon_j\to0$ $(j\to\infty)$。因对$x\in R_M$，上式左边为零，故在R^n中一致有$\partial^\alpha\varphi_j\to\partial^\alpha\varphi_0$。由此知$\varphi_0\in C^m(R^n)$且在$R_M$上当$|\alpha|\leqslant m$时有$\partial^\alpha\varphi_0(x)\equiv0$。令$k\to\infty$，当$x\in R_M^n$时，由前式得：

$$M_m(x)|\partial^\alpha\varphi_j(x)-\partial^\alpha\varphi_0(x)|\leqslant\varepsilon_j,\quad |\alpha|\leqslant m.\tag{10}$$

由此知$\|\varphi_j-\varphi_0\|_m\to0$，即$\{\varphi_j\}$在$\widehat{\Phi}_m$中趋于$\varphi_0$。此外，

$$M_m(x)|\partial^\alpha\varphi_0(x)|\leqslant\varepsilon_j+\|\varphi_j\|_m\tag{11}$$

故$\|\varphi_0\|_m<\infty$。于是$\varphi_0\in\widehat{\Phi}$. 这表明$\widehat{\Phi}_m$为完备空间。

若上述基本列的函数φ_j都属于空间$\Phi\equiv K\{M_k\}$，则极限

φ_0仍在$\widehat{\Phi}_m$中。因Φ依范$\|\cdot\|_m$的完备化Φ_m乃对Φ中元组成的基本列取极限而得，故Φ_m为$\widehat{\Phi}_m$的线性子空间。因 $\Phi=\bigcap_{j=1}^{\infty}\widehat{\Phi}_j$ 且 $\Phi\subset\Phi_j\subset\widehat{\Phi}_j$，故有：

$$\Phi\equiv K\{M_k\}=\bigcap_{j=1}^{\infty}\Phi_j$$

且对任一$\varphi\in\Phi$，有：

$$\|\varphi\|_1\leqslant\|\varphi\|_2\leqslant\cdots\leqslant\|\varphi\|_m\leqslant\cdots. \tag{12}$$

先证明一个一般性定理。

定理4 设线性空间E由单增范列(12)确定其局部凸拓扑，E_j为E依范$\|\cdot\|_j$的完备化，则E为完备空间当且仅当$E=\bigcap_{j=1}^{\infty}E_j$.

证 设$E=\bigcap E_j$且$\{x_k\}$为E中基本列，即依每个范$\|\cdot\|_m$的基本列，于是对某个$x^{(m)}\in E_m$有$x_k\to x^{(m)}$，$m=1,2,\cdots$。显然有$E_1\supset E_2\supset\cdots$且所有$x^{(m)}=x^*\in E$，因对每个$m$有$\|x_k-x^*\|_m\to0$，故在$E$中$x_k\to x^*$，故$E$为完备的。反之，设$E$为完备空间且$x\in\bigcap_{j=1}^{\infty}E_j$，则对每个$m$，存在$x_m\in E$，使$\|x_m-x\|_m<\frac{1}{m}$。对任一个$n\leqslant m$，由(1)有

$$\|x_m-x\|_n\leqslant\|x_m-x\|_m<\frac{1}{m},$$

故在E_m中$x_k\to x$，故$\{x_k\}$是每个E_m中的基本列。设在E中$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$，则$\|x_k-x^*\|_m\to0$，故对每个$m$有：$\|x-x^*\|_m=0$，于是$x=x^*\in E$，即$E=\bigcap E_j$.

据引理1后的讨论及定理1，即得

定理5 $K\{M_k\}$为F空间。

为了证明$K\{M_k\}$是FM空间，须引进条件：

(M) 对每个整数$k\geqslant 1$。存在整数$k'>k$，使对任意的$\varepsilon>0$，相应有$N_0>0$，当$|x|>N_0(x\in R^n_M)$或当$M_k(x)>N_0(x\in R^n_M)$时，总有$M_k(x)<\varepsilon M_{k'}(x)$。

当$R_M=\varnothing$时，条件(M)等价于条件：对每个$k\geqslant 1$，存在$k'>k$，使

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{M_k(x)}{M_{k'}(x)}=0.$$

注意当条件(M)成立时，对任何$|\alpha|\leqslant k$，$\varphi\in K\{M_k\}$，有：

$$M_k(x)\partial^\alpha\varphi(x)\to 0,\ \text{当}|x|\to\infty\text{或}M_k(x)\to\infty.$$

事实上，若不然而对某p及α，存在列$\{x_m\}$，使

$$M_k(x_m)|\partial^\alpha\varphi(x_m)|\geqslant C>0$$

$$(|x_m|\to\infty,\ \text{或}M_k(x_m)\to\infty),$$

则有$M_{k'}(x_m)|\partial^\alpha\varphi(x_m)|\to\infty(m\to\infty)$，而与$\|\varphi\|_{k'}<\infty$不符．

引理2 设条件(M)成立，$\{\varphi_j\}\subset K\{M_k\}$，且各阶导数列$\{\partial^\alpha\varphi_j\}$在$R^n$的任一有界集上一致收敛。假定对任何$k\geqslant 1$，$\|\varphi_j\|_k\leqslant C_k$（即$\{\varphi_j\}$为$K\{M_k\}$中有界集），则对任何$k\geqslant 1$，$\|\varphi_j\|_k\to 0$，即在$K\{M_k\}$中有$\varphi_j\to 0$。

证 对给定的k，取条件(M)中相应的k'，则对任意的$\varepsilon>0$，$x\in R^n_M$，当$|x|>N_0$或$M_k(x)>N_0$时有

$$M_k(x)<\frac{\varepsilon}{C_{k'}}M_{k'}(x),$$

于是对$|\alpha|\leqslant k$得

$$M_k(x)|\partial^\alpha\varphi_j(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{C_{k'}}M_{k'}(x)|\partial^\alpha\varphi_j(x)|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{C_{k'}}\|\varphi_j\|_{k'}\leqslant\varepsilon.$$

使上式可能不成立的点的集Γ含于集$|x|\leqslant N_0$或集$M_k(x)\leqslant N_0$，故可取j_0充分大，使当$j\geqslant j_0$时有

$$M_k(x)|\partial^\alpha\varphi_j(x)|<\varepsilon \quad (x\in\Gamma),$$

于是对所有$x\in R^n_M$，当$j\geqslant j_0$，总有$\|\varphi_j\|_k\leqslant\varepsilon$。由$k$的任意性知引理成立。

推论1 若$\{\varphi_j\}\subset K\{M_k\}$，$\|\varphi_j\|_k\leqslant C_k$ $(k\geqslant 1)$且在R^n任一有界集上一致有$\partial^\alpha\varphi_j\to\partial^\alpha\varphi_0(|\alpha|=0,1,\cdots)$，则$\varphi_0\in K\{M_k\}$且在其中$\varphi_j\to\varphi_0$。

事实上，(9)对任一个j及$\varepsilon_j=2C_k$成立，使$k\to\infty$即得(10)及(11)。故对任何$m\geqslant 1$有$\|\varphi_0\|_m<\infty$。由此知$\varphi_0\in\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\Phi_m=K\{M_k\}$，再对$\{\varphi_j-\varphi_0\}$应用引理2即得推论。

定理6 若条件(M)成立。则$K\{M_k\}$为FM空间。

证 只须证$K\{M_k\}$中有界集为相对列紧的。设A为有界集，则$\|\varphi\|_m\leqslant C_m$，$\forall\varphi\in A$，$1\leqslant m<\infty$。因$M_k(x)\geqslant 1$，对每个$\alpha$，集$\{\partial^\alpha\varphi;\varphi\in A\}$为一致有界的。应用Ascoli-Arzela定理及对角化方法，可得列$\{\varphi_j\}\subset A$，使各阶导数列$\{\partial^\alpha\varphi_j\}$在$R^n$的任一有界集上一致收敛。但$K\{M_k\}$为完备空间，故据推论1知$A$为相对列紧的。

定理7 若条件(M)成立且$\operatorname{int}\overline{R^n_M}\neq\varnothing$，则$K\{M_k\}$中的紧台函数作成稠的子线性空间。

证 由2.1.1(8)中的函数$\varphi(x)=\varphi(x;1,1,1)$

$$\varphi(x)=\begin{cases}\exp\dfrac{-1}{1-r^2}, & r<1,\\ 0, & r\geqslant 1,\end{cases}\quad r=|x|.$$

作函数

$$h(x)=C\int_{-2}^{2}\varphi(r-\rho)d\rho,$$

显然有$h(x)\in C_0^\infty(R^n)$；适当选择C可使$h(x)=1$，$|x|<1$．当$|x|>3$时，$h(x)\equiv 0$．对任一$\varphi\in K\{M_p\}$，令

$$\varphi_j(x)=\varphi(x)h\left(\frac{x}{j}\right),$$

因当$|x|<j$时$\varphi_j(x)=\varphi(x)$，故对任一α，在R^n 中任一有界集上一致有$\partial^\alpha\varphi_j\to\partial^\alpha\varphi$。若能证

$$\|\varphi_j\|_k\leqslant C_k \quad (1\leqslant k<\infty), \tag{13}$$

则据推论 1 知在$K\{M_k\}$中$\varphi_j\to\varphi$.为证明(5)，记

$$|\partial^\alpha h(x)|\leqslant C'_k,\quad |\alpha|\leqslant k,\ x\in R^n.$$

这列常数$\{C'_k\}$显然存在。于是有

$$\left|\partial^\alpha h\left(\frac{x}{j}\right)\right|\leqslant C'_k,\quad |\alpha|\leqslant k,\ x\in R^n,$$

应用Leibniz公式

$$\partial^\alpha(fg)=\sum_{\beta<\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\alpha^{\alpha-\beta}fD^\beta g \tag{14}$$

可得

$$M_k(x)|\partial^\alpha\varphi_j(x)|\leqslant C'_kC''_k\|\varphi\|_k,$$

取$C_k=C'_kC''_k\|\varphi\|_k$，即得(13)．最后注意，当$\mathrm{int}\overline{R^n_M}\neq\varnothing$，则$K\{M_k\}$含紧台函数。

推论2　$K(N)$及S都是FM空间，$D=\bigcup_{j=1}^{\infty}K(|x|\leqslant j)$是LF空间。

对空间$\Psi=Z\{M_k\}$可作类似的讨论。记$\widehat{\Psi}_m$为使2.1.1(6)中范$\|\psi\|_m<\infty$的整函数的集。仿照引理 1 可证$\widehat{\Psi}_m$为完备空间．

若记Ψ_m为Ψ按范$\|\cdot\|_m$的完备化，则 $\Psi\subset\Psi_m\subset\widehat{\Psi}_m$. 因$\Psi=\bigcap_{j=1}^{\infty}\widehat{\Psi}_j$，故有

$$\Psi\equiv Z\{M_k\}=\bigcap_{j=1}^{\infty}\Psi_j.$$

类似于定理 4 可得：

定理8 $Z\{M_k\}$为F空间。

类似于条件(M)，可引进条件(M_0)：

(M_0) 对任一整数$k\geqslant1$，存在整数$k'>k$，使

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{M_k(x)}{M_{k'}(x)}=0,$$

于是仿照定理可证明：

定理9 若条件(M_0)成立，则$Z\{M_k\}$为FM空间。

紧台函数不是整函数，当然不能为$Z\{M_k\}$中稠集。

最后引进权函数列$\{M_j(x)\}$及$\{M_j'(x)\}$的等价性 概 念。若$R_M'=\{x: M_j'(x)=\infty\}$重合于$R_M$，且对$x\in R_M^c$有

$$0<C(k)\leqslant\frac{M_k(x)}{M_k'(x)}\leqslant C'(k)<\infty, \tag{15}$$

对列$\{M_j(z)\}$可类似地引进等价列。

2.2.3 广函的导数与结构

先引进广函与乘子(见2.2.1定义 3)的积。

定义5 设 $a(x)$ 为检试空间Φ上乘子，则对任一广函$f\in\Phi'$，积af如下定义：

$$(af,\varphi)=(f,a\varphi).$$

由乘子定义知上式右边为Φ上连续线性泛函，故 $af\in\Phi'$. 映射$f\to af$显然为Φ'到Φ'的连续映射。故a也是Φ'上乘子。

利用Leibniz公式(14)可核验：若在$K\{M_k\}$中对任何$p\geqslant r\geqslant 1$，存在$q\geqslant p$及常数C_{pr}使

$$M_p(x)M_r(x)\leqslant C_{pr}M_q(x),$$

则每个满足不等式

$$|\partial^\beta g(x)|\leqslant C_\beta M_{k(\beta)}(x)\quad(0\leqslant|\beta|<\infty)$$

的函数$g(x)\in C^\infty$是$K\{M_k\}$上乘子；上式中$k(\beta)$为相应于β的k。特别，满足不等式

$$|\partial^\beta g(x)|\leqslant C_\beta(1+|x|)^{k(\beta)}\quad(0\leqslant|\beta|<\infty)$$

的C^∞函数$g(x)$是S上乘子；任一C^∞函数是$K(N)$上的乘子；多项式是$Z(a)$上的乘子。

定义6 设Φ为可微检试空间，则任一广函$f\in\Phi'$的导数$\partial^\alpha f$如下定义：

$$(\partial^\alpha f,\varphi)=(-1)^{|\alpha|}(f,\partial^\alpha\varphi),\quad\forall\varphi\in\Phi.$$

据可微检试空间定义知：对任何α，$\partial^\alpha f\in\Phi'$；且有如下结果。

定理10 若$\{f_j\}$在Φ'中弱或强收敛于f,则$\{\partial^\alpha f_j\}$也在Φ'中弱或强收敛于$\partial^\alpha f$。

定义6的根据如下：若$f(x)$在R^n中有连续导数且$\varphi\in D(R^n)$，则由分部积分有

$$\int\partial_i f(x)\varphi(x)dx=-\int f(x)\partial_i\varphi(x)dx=-(f,\partial_i\varphi)$$

这里及以后常略去积分号下的积分域R^n。上式表明由$\partial_i f$确定的广函重合于由$f(x)$确定的广函的导数。以后在可能引起混淆的场合，用$[\partial_i f]$记通常导数。广函$\partial_i f$则称为f的**弱导数**或**广义导数**。

容易看出，空间$D(N)$，$D(R^n)$，S及所有$K\{M_k\}$都是可微空间，故相应的广函都是无穷可微的（当然是在弱导数意

义下)。$Z(a)$也是可微空间。事实上，若$\psi(z)\in Z(a)$，则有

$$M_k(z)\left|\frac{\partial\psi(z)}{\partial z_j}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta_j-z_j|=1}\frac{M_k(z)}{M_k(z')}\frac{M_k(z')|\psi(z')|}{|\zeta_j-z_j|^2}|d\zeta_j|\leqslant C_k\|\psi\|_k,$$

其中$z'=(z_1,\cdots,z_{j-1},\zeta_j,z_{j+1},\cdots,z_n)$，常数$C_k$与$\psi$无关。由此得：

$$\left\|\frac{\partial\psi}{\partial z_j}\right\|_k\leqslant C_k\|\psi\|_k.$$

这表明$\dfrac{\partial\psi}{\partial z_j}\in Z\{M_k\}$且映射$\psi\to\dfrac{\partial\psi}{\partial z_j}$为$Z(a)$到自身的连续映射。故$Z(a)$上广函也是无穷可微的。

在可微检试空间Φ上，无穷阶常系数算子$A(\partial)=\sum_{\alpha}a_{\alpha}\partial^{\alpha}$有定义，只要对每个$\varphi\in\Phi$，级数$A(-\partial)\varphi=\sum_{\alpha}a_{\alpha}(-1)^{|\alpha|}\partial^{\alpha}\varphi$收敛。对任何$f\in\Phi'$，可定义$A(\partial)f$如下：

$$(A(\partial)f,\varphi)=(f,A(-\partial)\varphi),\quad \forall\varphi\in\Phi,$$

若$A(-\partial)\varphi$在Φ的有界集上关于φ一致收敛，则$A(\partial)f\in\Phi'$，即A为Φ'中有界算子。

现在考虑$K\{M_k\}$上广函的结构问题。

设f为$K\{M_k\}$上广函。据1.3.1推论4及2.1.1定理3知f是某个Φ_k上的连续线性泛函。对每个$\varphi\in\Phi_k$，有一一对应的ν维向量函数$\{\psi\}$，其分量是：

$$\psi_{\alpha}(x)=M_k(x)\partial^{\alpha}\varphi(x),\quad x\in R^n_M,\ 0\leqslant|\alpha|\leqslant k$$

ν就是分量的总个数。设Γ^{ν}是ν个Γ的直积，这里Γ由R^n_M上连

续并具有限范

$$\|h\| = \sup_{x\in R^n_M} |h(x)|$$

的所有函数$h(x)$组成。Γ^ν中范取为各分量的范之和。向量函数$\{\psi\}$张成Γ^ν的线性子空间$\triangle^\nu$。因$f\in\Phi'_k$，泛函$L(\{\psi\})=f(\varphi)$是$\triangle^\nu$上的连续线性泛函，而可保范地延拓于Γ^ν上得连续线性泛函$\widehat{L}$。据Riesz表现定理，Γ^ν上的连续线性泛函$\widehat{L}$取形：

$$\widehat{L}(\theta) = \sum_{|\alpha|<k}\int_{R^n_M}\theta_\alpha(x)d\sigma_\alpha(x), \quad \theta=\{\theta_\alpha\},$$

其中$\sigma_\alpha(x)$为有界变差函数或测度。这就给出

定理11 $K\{M_k\}$上的任一广函f具形

$$f(\varphi)=\sum_{|\alpha|<m}\int_{R^n_M}M_m(x)\partial^\alpha\varphi(x)d\sigma_\alpha(x), \qquad (16)$$

$m\geqslant 1$为某个整数，且$f\in\Phi'_m$的范为

$$\|f\|_m=\sum_{|\alpha|<m}\int_{R^n_M}|d\sigma_\alpha(x)|.$$

为了得到广函的更方便的表示，对权函数列$\{M_k\}$作如下要求：

(N_1) 对每个$k\geqslant 1$，存在$k'\geqslant k$，使

$$m_{kk'}(x)\equiv\frac{M_k(x)}{M_{k'}(x)}\in L(R^n_M);$$

(N_2) 对每个$k\geqslant 1$，存在$k''\geqslant k$，使对任何$x\in R^n_M$，

$$\frac{M_k(x)}{M_{k''}(x')}\leqslant C_k, \quad |x'-x|\leqslant 1.$$

现在证明2.2.1(3)中范列等价于范列

$$\|\varphi\|_k' \equiv \sup_{|\alpha|\leq k}\int_{R_M^n} M_k(x)|\partial^\alpha\varphi(x)|dx. \qquad (17)$$

首先设$x\in R_M^n$，则由(N_1)有

$$M_k(x)|\partial^\alpha\varphi(x)| = m_{kk'}(x)M_{k'}(x)|\partial^\alpha\varphi(x)|$$
$$\leqslant m_{kk'}(x)\|\varphi\|_{k'},$$

两边沿R_M^n积分即得

$$\|\varphi\|_k' \leqslant B_k\|\varphi\|_{k'} \quad \left(B_k = \int_{R_M^n} m_{kk'}(x)dx\right). \qquad (18)$$

其次，对任意的$x\in R^n$，可证明不等式

$$|\varphi(x)| \leqslant A\sum_{|\beta|\leq q}\int_{|\xi-x|<1}|\partial^\beta\varphi(\xi)|d\xi, \qquad (19)$$

其中A与q不依赖于φ。为证(19)，取$r(t)\in C_0^1(R^1)$，使$r(0)=1$，$r(t)=0$，$\forall\ |t|\geqslant\varepsilon$，$\varepsilon>0$固定。因

$$\varphi(x) = r(0)\varphi(x) - r(-\varepsilon)\varphi(x_1-\varepsilon, x_2, \cdots, x_n)$$
$$= \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}[r(\xi_1-x_1)\varphi(\xi_1, x_2, \cdots, x_n)]d\xi_1$$
$$= \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1}\left(\frac{\partial r}{\partial\xi_1}\varphi + r\frac{\partial x}{\partial\xi_1}\right)d\xi_1,$$

故有

$$|\varphi(x)| \leqslant A_0\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1}|\varphi(\xi_1, x_2, \cdots, x_n)|d\xi_1 +$$
$$+ A_0\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1}\left|\frac{\partial}{\partial\xi_1}\varphi(\xi_1, x_2, \cdots, x_n)\right|d\xi_1.$$

对$\varphi(\xi_1, x_2, \cdots, x_n)$及$\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}\varphi(\xi_1, x_2, \cdots, x_n)$作类似的处理，而换$x_1$，$r(x_1)$为$x_2$，$r(x_2)$等，并取$\varepsilon$使$\varepsilon\sqrt{n}<1$，即得(19)，且

$q=n$.

在(19)中换φ为$\partial^\alpha\varphi$，并取$k''\geqslant k+q$。当$x\in R_M^n$时，得

$$M_k(x)|\partial^\alpha\varphi(x)|$$

$$\leqslant A\sum_{|\beta|<q}\int_{\substack{|\xi-x|<1\\ \xi\in R_M^n}}\frac{M_k(x)}{M_{k''}(\xi)}M_{k''}(\xi)|\partial^{\alpha+\beta}\varphi(\xi)|\,d\xi$$

$$\leqslant A'C_k\|\varphi\|'_{k''},$$

A'为常数，上式表明，

$$\|\varphi\|_k\leqslant A'C_k\|\varphi\|'_{k''}. \qquad (20)$$

(20)与(18)表明范列$\{\|\cdot\|_k\}$与$\{\|\cdot\|'_k\}$为等价的。故在定理N的证明中可换$\|\cdot\|_k$为$\|\cdot\|'_k$，而在空间Γ^ν上取范

$$\|\theta\|=\sum_{j=1}^{\nu}\int_{R_M^n}|\theta_j(x)|\,dx,\quad \theta=(\theta_1,\cdots,\theta_\nu)\in\Gamma^\nu\,, \qquad (21)$$

因具范(21)的空间Γ^ν上的连续线性泛函T具形：

$$T(\theta)=\sum_{j=1}^{\nu}\int_{R_M^n}\theta_j(x)g_j(x)dx$$

其中$g_j(x)\in L^\infty(R_M^n)$，$j=1,\cdots,\nu$。于是得如下结果。

定理12 设条件(N_1)及(N_2)成立，则$K\{M_k\}$上任一广函f具形

$$f(\varphi)=\sum_{|\alpha|<m}\int_{R_M^n}M_m(x)f_\alpha(x)\partial^\alpha\varphi(x)dx, \qquad (22)$$

m为某正整数，$f_\alpha(x)$都是殆遍有界可测函数，且

$$\|f\|_m=\sum_{|\alpha|<m}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in R_M^n}|f_\alpha(x)|. \qquad (23)$$

考虑Schwartz急降空间$S\equiv K\{(1+|x|)^k\}$。条件(N_1)及(N_2)显然成立，且$R_M^n=R^n$。这时(22)右边的每一项可改写

为

$$(-1)^{|\alpha|}\partial^{\alpha}(M_k f_\alpha)(\varphi),\tag{24}$$

其中$M_k f_\alpha$为S上函数型广函。对每个积分

$$I_i=\int_0^{x_i}M_k f_\alpha dx_i,\quad i=1,\cdots,n$$

可得S'中元$\partial_i I_i=M_k f_\alpha$。对多重积分有同样结果。故(24)中每个泛函可表为$\alpha^\beta g_\alpha$，且对所有α，β是同一的，而g_α则为R^n上满足不等式

$$|g_\alpha(x)|\leqslant A_\alpha(1+|x|)^{m_\alpha}$$

的连续函数。总结上述，即得下面的结论。

定理13 S上每个广函f取形

$$f=\alpha^\beta[(1+|x|^2)^m F(x)],\tag{25}$$

其中$F(x)$是R^n上的有界连续函数；故f称缓增(幂增)广函。

设f在S'的有界集B'中变动。据2.1.1定理3，B'含于某Φ_m'中且依其中范$\|\cdot\|_m$有界。故(22)中的m对所有$f\in B'$是同一的，且数集(23)也是有界的。类似于定理13的证明，可得如下结果。

定理14 设B'为S'中有界集，则对每个$f\in B'$，存在表示式(25)，且β与m是相同的。此外，连续函数集$\{F(x)\ f\in B'\}$在R^n上是一致有界的。

2.3 分布理论

2.3.1 空间D与分布

设$\Omega=\{\Omega_0=\varnothing,\Omega_1,\Omega_2,\cdots\}$，$\Omega_j=\{x_i|x|<j\}$；$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots\}$为单降于零的任意正数列；$\{m\}=\{m_0,m_1,\cdots\}$为单

增于∞的任意非负整数列。于是可在空间$C_0^\infty(R^n)$引进集合

$$V(\{m\},\{\varepsilon\})=\{\varphi(x):\varphi\in C_0^\infty(R^n),\ |\partial^\alpha\varphi|<\varepsilon_j,\ |\alpha|\leqslant m_j,\ x\notin\Omega_j\}.$$

虽然$j=0,1,\cdots$是可列集。但因V随$x\notin\Omega_j$而不同，故把所有的V作为C_0^∞的零元邻域基时，并不满足第一可列公理。记C_0^∞具备上述拓扑所得的拓扑线性空间为D或$\mathscr{D}$。注意D是局部凸的，但不可度量化。D也可看作空间列$\{D(\overline{\Omega}_j),\ j=1,2,\cdots\}$的并。由于$D(\overline{\Omega}_j)$都是$F$空间，$D$是$LF$空间。

记$D(G)$为台含于G的所有$\varphi\in D$的集。

设K为R^n中某个紧集，$\{M\}=\{M_0,M_1,\cdots\}$为单增正数列。记

$$B(\{M\},K)=\{\varphi:\varphi\in D(K),\ |\partial^\alpha\varphi|\leqslant M_m,\ |\alpha|\leqslant m,\ m=0,1,\cdots\}.$$

定理1 集$W\subset D$在D中有界当且仅当：它含于某个$B(\{M\},K)$，即：W中所有φ的台含于同一紧集K。且对每个α，集$\{\partial^\alpha\varphi:\ \varphi\in W\}$一致有界。

证 由1.2.4定义5知，若对D中任一零元邻域V，存在$\lambda>0$使$W\subset\lambda V$，则W为D中有界集。由此知每个$B(\{M\},K)$为D中有界集。故若W含于这种集中，W必为有界集。反之，设W为有界集。先证W中所有φ的台含于同一有界集。如果不然，则存在列$\{\varphi_j\}\subset W$，$\{x_j\}\subset R^n$，使$\varphi_j(x_j)\neq 0$，$|x_j|>j$。选$\varepsilon_j=|\varphi_j(x_j)|/j$及任意的$\{m\}$。于是$W$对任何$\lambda>0$不含于$\lambda V(\{m\},\{\varepsilon\})$，而与$W$的有界性假定不符。故对某个紧集$K$，有$W\subset D(K)$。当$\delta>0$充分小时，$\delta W$含于$D$的任一零元邻域中，故关于$\varphi\in W$一致有$|\partial^\alpha\varphi|\leqslant M_\alpha$。取$M_m=\max\limits_{|\alpha|\leqslant m}M_\alpha$，即知$W\subset B(\{M\},K)$。

定义1 D的对偶空间D'中元称为分布。

定理2 D上线性泛函f为连续的，当且仅当对任一紧集$K\subset R^n$，f在$D(K)$上的缩射为连续泛函。

据1.4.1推论1，定理2的等价表述如下：

定理2' D上线性泛函f为连续的，当且仅当对每个有界集$B\subset D$，$f(B)$为有界集。

定理2的证明依据下面的定理。

定理3 D中凸集W为零元邻域，当且仅当对任一紧集$K\subset R^n$，$W\cap D(K)$为$D(K)$的零元邻域。

证 显然，$V(\{m\},\{\varepsilon\})\cap D(K)$为$D(K)$的零元邻域．因$D$的每个零元邻域总含有某个$V(\{m\},\{\varepsilon\})$，故必要性得证。为证充分性，取$K=\{x: |x|\leqslant k+2\}$.注意对任一个$k\geqslant 0$，存在整数$m_k\geqslant 0$及正数$\eta_k$，使当$\varphi\in D$，$\operatorname{supp}\varphi\subset\{x: |x|\leqslant k+2\}$，且

$$|\partial^\beta\varphi(x)|\leqslant\eta_k,\quad |\beta|\leqslant m_k$$

时，必有$\varphi\in W$。不失一般性，可取$\{m_k\}$单增到∞。

据1.6.4定理9，存在R^n上的单位分解$\{\alpha_k(x)\}$，使$\operatorname{supp}\alpha_k\subset\{x: k\leqslant|x|\leqslant k+2\}$。于是可把每个$\varphi\in D$表为

$$\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}(2^{k+1}\alpha_k\varphi).$$

因W为凸集，若对每个k有$2^{k+1}\alpha_k\varphi\in W$，即有$\varphi\in W$.

其次可注意，若

$$|\partial^\beta\varphi(x)|\leqslant\varepsilon_k,\ |\beta|\leqslant m_k,\ |x|\geqslant k,$$

则$|2^{k+1}\partial^\beta(\alpha_k\varphi)|\leqslant A_k\varepsilon_k$，$\forall x\in R^n$，$A_k$为与$\varphi$及$\varepsilon_k$无关的常数。故若取$\{\varepsilon_k\}$单降于零且使$A_k\varepsilon_k<\eta_k$,则$\varphi\in V(\{m\},\{\varepsilon\})$表明$2^{k+1}\alpha_k\varphi\in W$。故$\varphi\in W$，即$W$为$D$中零元邻域。

取$K_m=\{x: |x_j|\leqslant m,\ j=1,\cdots,n\}$，由定理3的证明知

有：

推论1 D是空间列$\{K(m), m=1,2,\cdots\}$的严格归纳极限。

定理2是2.1.3推论7及上一推论的结果．由此知D是2.2.1定义1意义下的检试空间。

推论2 D是完备空间(在基本列意义下)。

这是定理3及2.1.3定理15的推论。

容易直接核验，D中有界集为相对紧的．故D为Montel空间。附带提到而不作证明，M空间是自反的，且其对偶空间也是M空间。

由2.1.3推论7及定理16，还可得如下结论。

定理2″ D上线性泛函f为连续的，当且仅当对D中列$\varphi_j\to 0$有$f(\varphi_j)\to 0$。

定理4 D'为完备空间。

上述所有结果也适用于$D(G)$及其对偶空间$D'(G)$，这里G为R^n中开集。这时在$V(\{m\},\{\varepsilon\})$中只须取$\Omega=\{\Omega_0=\varnothing, \Omega_1,\cdots\}$，使$\Omega_j\subset\Omega_{j+1}\subset G$, $j=1,2,\cdots$，且G的每个紧子集含于某个Ω_j中。

关于D为$C_0^\infty(R^n)$中稠集以及D'中分布的初等运算，例如以$a(x)\in C^\infty(R^n)$相乘及微分运算等，因为已有较多中文书论及，所以不再重复。这里只强调一下，D在$C^0(R^n)$中也是稠集，为此只须取函数$\beta_\varepsilon(x)\in D$，使当$|x|<\dfrac{1}{\varepsilon}$时，$\beta_\varepsilon(x)=1$.则对任一函数$f(x)\in C^0$，有$C_0^\infty$中列$\{f_\varepsilon(x)=\beta_\varepsilon(x)f(x)\}$ $(\varepsilon=1, \dfrac{1}{2},\cdots)$在$C^0$中收敛于$f$，即$C_0^\infty$在$C^0$中稠；随之$D$也在$C^0$中稠。

2.3.2 分布的唯一确定

空间D显然满足2.2.1定理 3 的条件 1)—2)，故D上分布唯一确定。现在作进一步的讨论.但须提到，对任一空间$D(K)$(K为R^n中任意紧集)都不满足条件 1)，故$D(K)$上分布非唯一确定。

定义2 给定开集$\Omega\subset R^n$. 若对所有$\varphi\in D(\Omega)$有$f(\varphi)=0$，即称分布f在Ω上为零(零分布)；若在Ω上$f_1-f_2=0$，称在Ω上$f_1=f_2$。定义分布f的台为

$$\operatorname{supp}f=\{x: x\in R^n, x\text{不具备任何邻域}\omega, \text{使}f\text{在}\omega\text{上为零}\}.$$

据定义知$\operatorname{supp}f$为R^n中闭集。

定理5 设$\{\Omega_j\}$为开集Ω的开覆盖列，$\{f_j\}$为分布列，f_j定义于Ω_j。假定当$\Omega_j\cap\Omega_k\neq\varnothing$时，在交集上即有$f_j=f_k$. 则存在定义于$\Omega$的唯一分布$f$，使在每个$\Omega_j$上有$f=f_j$。

证 设$\{\alpha_j\}$为相应于$\{\Omega_j\}$的单位分解，则有

$$\varphi=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\varphi, \quad \forall\varphi\in D, \ x\in R^n,$$

因$\operatorname{supp}\varphi$只与有限个$\operatorname{supp}\alpha_j$相交，上式右边仅含有限个项。故若$f$存在，应有

$$f(\varphi)=\sum_j f(\alpha_j\varphi)=\sum_j f_j(\alpha_j\varphi).$$

这表明f唯一地确定. 上式右边还可用以建立分布f的存在性。显然，如此确定的泛函f显然为线性的。为证其连续性，只须对任一紧子集$K\subset\Omega$，证明f在$D(K)$上的连续性(见2.3.1定理 2)。当$\varphi\in D(K)$时，级数$\sum\limits_j f_j(\alpha_j\varphi)$只含有限项。因每个

f_j连续，故f也连续。

剩下须证明在Ω_j上$f=f_j$。设$\varphi\in D(\Omega_j)$，则 $\mathrm{supp}\,\alpha_k\varphi\subset\Omega_j\cap\Omega_k$，故若$\alpha_k\varphi\neq 0$，则$\Omega_j\cap\Omega_k\neq\varnothing$。据假定，$f_j(\alpha_k\varphi)=f_k(\alpha_k\varphi)$，对$k$作和得所需结果。

$$f_j(\varphi)=\sum_k f_j(\alpha_k\varphi)=\sum_k f_k(\alpha_k\varphi)=f(\varphi).$$

推论3 若在每个开集Ω_j上$f=0$，则在并$\Omega^*=\bigcup_j\Omega_j$上$f=0$。若在每个$\Omega_j$上$f_m\to 0$（$m\to\infty$），则在$\Omega^*$上有$f_m\to 0$（$m\to\infty$）。

定理6 设K为R^n中紧集。对给定分布f，存在整数$m\geqslant 0$，使当$\varphi_j\in D(K)$且$\partial^\alpha\varphi_j\to 0$（$j\to\infty$），$|\alpha|\leqslant m$，则有$f(\varphi_j)\to 0$。

证 f为$D(K)$上连续泛函，故对任意的$\varepsilon>0$，存在$D(K)$中零元邻域$V(m,\eta,K)=\{\varphi;\ \varphi\in D(K),|\partial^\alpha\varphi|<\eta,|\alpha|\leqslant m\}$，使当$\varphi\in V$时，$|f(\varphi)|\leqslant\varepsilon$。固定$\varepsilon$，则对任何$\lambda>0$，关系$\varphi\in V(m,\lambda\eta,K)$表明$|f(\varphi)|\leqslant\lambda\varepsilon$。取$\lambda$充分小，即得所需。

应用2.2.3定理12，并注意对于$D(K)$有$M_k(x)\equiv 1$，$x\in R^n_M$，可得如下结果。

定理7 具紧台K的任一分布f具形：

$$f=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\partial^\alpha F_\alpha(x),\tag{1}$$

其中F_α都是连续函数，且$\mathrm{supp}\,F_\alpha$含于K的任何给定邻域U。

注1 U一般不能换为K，如Schwartz所举例子所示。考虑$D(R^1)$上如下定义的分布：

$$(f,\varphi)=\lim_{m\to\infty}\left[\sum_{j=1}^{m}\varphi\left(\frac{1}{j}\right)-m\varphi(0)-\varphi'(0)\ln m\right],$$

$$\forall \varphi \in C^\infty(R^1)$$

显然，f具紧台$\mathrm{supp} f = K = \{0, 1, \frac{1}{2} \cdots\}$。作展式

$$\varphi\left(\frac{1}{j}\right) = \varphi(0) + \varphi'(0)\frac{1}{j} + \varphi''\left(\frac{\theta_j}{j}\right)\frac{1}{2j^2}, \quad 0 < \theta_j < 1,$$

记$C = \lim\limits_{\to\infty}\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \ln m\right]$，有

$$(f, \varphi) = C\varphi'(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi''\left(\frac{\theta_j}{j}\right)}{2j^2}.$$

由此可核验f为C^∞上广函。但若取$\varphi_k(x) \in D \subset C^\infty$，使

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}}, & x \geqslant \frac{1}{k}; \\ 0, & x \leqslant \frac{1}{k+1}. \end{cases}$$

注意$|\varphi_k(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$，故当$k \to \infty$时，$\varphi_k$一致趋于零，且各阶导数在$K$上为零(在$K$外不为零)。由于$\frac{1}{j} \geqslant \frac{1}{k}$的$j$只有$j = 1, \cdots, k$共$k$个，因此有：

$$(f, \varphi_k) = \frac{k}{\sqrt{k}} = \sqrt{k} \to \infty,$$

故不能只要求φ_k的各阶导数只在$K = \mathrm{supp} f$上趋于零或等于零，即这个分布不能用$\mathrm{supp} F_a = K$的函数F_a表为(1)的形式. 关于在何种紧台上可取$U = K = \mathrm{supp} f$，参看 L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, *I*, pp.95, 98, 2nd ed., Hermann, Paris, 1966. 那里引进了正规台的概念. 可提到，有界闭

域是正规台；有限点集也是正规台。可注意，为简单计，在2.2.1中曾要求R_M^n含内点。

定理8 设Ω为R^n中有界开集，则任一分布f在Ω上可表为$f=\partial^m F(x)$，m为某非负整数，$F(x)$为连续函数，且$\mathrm{supp}F$含于$\overline{\Omega}$的任意邻域中。

只须取$K=\overline{\Omega}$再应用定理7。

推论4 设Ω为有界开集，则$D(\Omega)$上每个分布f为有限阶的。

推论5 设分布f具紧台K，则存在非负整数m，使当$\varphi\in D$且$\partial^\alpha\varphi|_K\equiv 0(|\alpha|\leqslant m)$时，$f(\varphi)=0$。

定理9 任一分布f可表为

$$f=\sum_j \partial^{\beta_j}F_j(x), \tag{2}$$

其中F_j都是紧台连续函数，$\mathrm{supp}F_j$含于$\mathrm{supp}f$的任意邻域中，且(2)的右边是局部有限项和。

证 取$\mathrm{supp}f$的有界开覆盖列$\{\Omega_j\}$及相应单位分解$\{\alpha_j(x)\}$，记$f_j=\alpha_j f$，$f=\sum_j f_j$。因每个f_j具紧台，故可应用定理7而得(2)。

利用推论3及定理9，仿照2.2.1定理3的证明处理有限阶广函，即知D'中分布唯一确定。

为了深入考察紧台分布，引进空间$\mathscr{E}$。在$C^\infty(R^n)$中构造如下的零元邻域基

$$V(m,\varepsilon,K)\equiv\{\varphi:\ \varphi\in C^\infty(R^n),\quad |\partial^\alpha\varphi(x)|<\varepsilon,\quad |\alpha|\leqslant m,\ x\in K\}.$$

这里m为任意非负整数，ε为任意正数，K为R^n中任一紧集。

具备这种拓扑的空间C^∞通记为$\mathscr{E}$．$\mathscr{E}$也可由C^∞及如下范列

$$\|\varphi\|_m=\sup_{|\alpha|\leq m}\sup_{|x|\leq m}|\partial^\alpha\varphi(x)|,\quad m=1,2,\cdots$$

确定．显然，$\mathscr{E}$为FM空间，且含D为稠子空间．

记$\mathscr{E}$的对偶空间为$\mathscr{E}'$，有$\mathscr{E}'\subset D'$．$\mathscr{E}'$中分布f必具紧台．不然则存在列$\{\varphi_j\}\subset D$，使$\mathrm{supp}\varphi_j$位于$|x|\geqslant j$中，$j=1,2,\cdots$，且$f(\varphi_j)=1$．这与在$\mathscr{E}$中$\varphi_j\to 0$矛盾．反之，设f_0为紧台分布，则至少存在一个$f\in\mathscr{E}'$，使在D上$f=f_0$．事实上，对任何$\varphi\in\mathscr{E}$及某个$\alpha\in D$，只要在$\mathrm{supp}f_0$的某邻域中$\alpha=1$，可令$f(\varphi)=f_0(\alpha\varphi)$，由于$D$在$\mathscr{E}$中稠，即得所需的$f$．这样确定的$f$与$\alpha$的选择并无关系．因若$\beta\in D$且在$\mathrm{supp}f_0$的某邻域中$\beta=1$，则$\mathrm{supp}(\alpha-\beta)\cap\mathrm{supp}f_0=\varnothing$，故有

$$f_0(\alpha\varphi)-f_0(\beta\varphi)=f_0((\alpha-\beta)\varphi)=0,$$

即$f_0(\alpha\varphi)=f_0(\beta\varphi)$．总结以上讨论，得如下定理．

定理10　$\mathscr{E}'$是具紧台的分布的空间．

最后考虑台仅含一点的分布．

定理11　设分布f的台仅含一点x_0，则有唯一表示

$$f=\sum_{|\alpha|\leq m}c_\alpha\partial^\alpha\delta(x-x_0),\tag{3}$$

m为与f有关的非负整数，c_α都是常数（实或复值），在点x_0的Dirac测度$\delta(x-x_0)$如下定义

$$(\delta(x-x_0),\ \varphi(x))=\varphi(x_0);$$

$$(\partial^\alpha\delta(x-x_0),\ \varphi(x))=(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi(x_0)$$

证　不妨取$x_0=0$．为证唯一性，把(3)的两边作用于x^k得

$$f(x^k)=c_k(\partial^k\delta,x^k)=(-1)^kc_kk!,\tag{4}$$

故c_k唯一确定．为证表示式(3)的存在性，注意f必为有限阶

广函。设其阶$\leqslant m$。由推论 5 知，当$\psi\in\mathscr{E}$且$\partial^\alpha\psi(0)=0(|\alpha|\leqslant m)$，即有$f(\psi)=0$。特别取

$$\psi(x)=\varphi(x)-\sum_{|\alpha|<m}\frac{x^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha\varphi(0),\quad \forall\varphi\in D,$$

于是由$f(\psi)=0$得

$$f(\varphi)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\frac{\partial^\alpha\varphi(0)}{\alpha!}f(x^\alpha)=\sum_{|\alpha|<m}(-1)^{|\alpha|}c_\alpha\partial^\alpha\varphi(0).$$

这里用到(4)。由δ测度的定义即得(3)。

2.3.3 分布的卷积

当$f,g\in L(R^n)$时，它们的卷积$f*g$如下定义

$$(f*g)(x)=\int f(x-y)g(y)dy$$

且有$f*g=g*f\in L(R^n)$。把上式两边作用于$\varphi\in D$得：

$$\begin{aligned}(f*g)(\varphi)&=\int dx\int f(x-y)g(y)\varphi(x)dy\\&=\int g(y)dy\int f(x-y)\varphi(x)dx\\&=\int g(y)dy\int f(x)\varphi(x+y)dx.\end{aligned}$$

假定积分顺序可交换。上式可改写为

$$\begin{aligned}\langle f*g,\varphi\rangle&=\langle g(y),\langle f(x),\varphi(x+y)\rangle\rangle\\&\equiv\langle g(y)\otimes f(x),\varphi(x+y)\rangle.\end{aligned}$$

为避免积分收敛性讨论，假定分布f及g中有一具紧台，例如$\mathrm{supp}f=K$为紧集，则可定义

$$(f*g)(\varphi)=\langle f\otimes g,\ \varphi(x+y)\rangle. \qquad (5)$$

为证明上式右边有意义，注意$f\otimes g$的台含于$K\times R^n$。记$\mathrm{supp}\varphi=A$，则由(5)右边应有$(x,y)\in K\times R^n$，$x+y\in A$，即

$(x,y)\in K\times(A-K)$。因$K\times(A-K)$为有界集，故(5)的右边有意义。也可改写(5)为

$$(f*g)(\varphi)=\langle f(x)\otimes g(y),\ \alpha(x)\varphi(x+y)\rangle, \qquad (6)$$

其中$\alpha\in D$，且在K的邻域中$\alpha=1$。

由(5)知有$f*g=g*f$。

定理12 设$f\in\mathscr{E}'$，$g\in D'$，则存在$f*g\in D'$，且

$$\operatorname{supp} f*g\subset\operatorname{supp} f+\operatorname{supp} g. \qquad (7)$$

这里集和为向量和：$A+B=\{x+y;\ \forall x\in A,\ y\in B\}$.

证 $f*g$作为线性泛函存在性，由(5)右边有定义而得证，剩下须证$f*g$的连续性。当φ在有界集$B\subset D$中变动时，则$\alpha(x)\varphi(x+y)$在$D(R^n\times R^n)$的有界集中变动，这时(6)右边的数集为有界集。因(6)的右边等于(5)的右边，故$f*g$在D的有界集上有界。据2.3.1定理2′，$f*g$为连续线性泛函。

为证明(7)，注意$\operatorname{supp} f+\operatorname{supp} g$为闭集，其余集$\Omega$为开集，故须证：当$\varphi\in D(\Omega)$，即有$\langle f*g,\varphi\rangle=0$。因

$$\operatorname{supp}\varphi(x+y)\subset\{(x,y);\ (x,y)\in R^n\times R^n,\ x+y\in\Omega\},$$

而$\operatorname{supp} f(x)\otimes g(y)=\operatorname{supp} f\times\operatorname{supp} g\subset\{(x,y);\ x+y\in\operatorname{supp} f+\operatorname{supp} g,\ (x,y)\in R^n\times R^n\}$，但$\Omega\cap(\operatorname{supp} f+\operatorname{supp} g)=\varnothing$，故$\operatorname{supp}\varphi(x+y)\cap\operatorname{supp} f\otimes g=\varnothing$。由(5)知有$\langle f*g,\varphi\rangle=0$，故(7)成立。

设f,g,h为分布，至少有两个属$\mathscr{E}'$，则可核验

$$\begin{aligned}\langle (f*g)*h,\varphi\rangle&=\langle f*(g*h),\varphi\rangle\\&=\langle f\otimes g\otimes h,\varphi(x+y+z)\rangle.\end{aligned} \qquad (8)$$

对任意分布$f\in D'$，总有

$$\delta*f=f;\quad \partial^\alpha(\delta*f)=(\partial^\alpha\delta)*f. \qquad (9)$$

若$f\in\mathscr{E}'$，$g\in D'$，则有

$$\partial^\alpha(f*g)=(\partial^\alpha f)*g=f*(\partial^\alpha g). \qquad (10)$$

定理13 设$f\in D'$，则对任何$\alpha\in D$，有$f*\alpha\in C^\infty$。

证 记$\theta(x)=\langle f(y),\alpha(x-y)\rangle$，有$\partial^\alpha\theta(x)=\langle f(y),\partial_x^\alpha \alpha(x-y)\rangle$，故$\theta\in C^\infty$。另一方面，对任一个$\varphi\in D$，有

$$
\begin{aligned}
(f*\alpha)(\varphi) &= \langle f(y),\int\alpha(x)\varphi(x+y)dx\rangle \\
&= \langle f(y),\int\alpha(x-y)\varphi(x)dx\rangle \\
&= \langle f(y)\otimes\varphi(x),\alpha(x-y)\rangle \\
&= \langle\varphi(x),\langle f(y),\alpha(x-y)\rangle\rangle=\langle\theta,\varphi\rangle,
\end{aligned}
$$

故$f*\alpha=\theta\in C^\infty$.

特别取列$\{\alpha_j\}\subset D$，使在D'中$\alpha_j\to\delta$，例如

$$
\alpha_j(x)=\begin{cases} Aj^n\exp\dfrac{-1/j^2}{\dfrac{1}{j^2}-|x|^2}, & |x|<\dfrac{1}{j};\\[2ex] 0, & |x|\geqslant\dfrac{1}{j},\end{cases}
$$

且A取得使$\int\alpha_j(x)dx=1$。则有

$$
f*\alpha_j\to f\quad（在D'中），\tag{11}
$$

而称为分布f的**光滑化列**。于是得

定理14 D在D'的弱拓扑下为稠集。

卷积还可用以讨论函数或方程的解的光滑性。设$P(\partial)=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha\partial^\alpha$为常系数线性微分算子，则$P$的基本解$F$定义为方程

$$
P(\partial)F=\delta(x) \tag{12}
$$

在D'中的解，即$F\in D'$使下式

$$
\langle F,P(-\partial)\varphi\rangle=\langle\delta,\varphi\rangle
$$

对每个$\varphi\in D$成立。F也称为相应方程$P(\partial)u=0$的基本解。例如，多重Laplace方程

$$\triangle^k u=0$$

的基本解具形

$$F_{k,n}=r^{2k-n}(A_{k,n}\ln r+B_{k,n}). \tag{13}$$

事实上，注意$\triangle^{k-1}(\triangle F_{k,n})=\triangle^{k-1}F_{(k-1),n}=\delta$，故有

$$\triangle F_{k,n}=F_{(k-1),n},$$

即可递推求解。由于算子$\triangle$有球对称性，自然考虑解为r的函数。为此先解方程

$$\triangle f(r)=f''(r)+\frac{n-1}{r}f'(r)=g(r). \tag{14}$$

令$f'(r)=h(r)$，得一阶方程，于是可得(14)的解为

$$f(r)=\int r^{1-n}\left\{\int^r \rho^{n-1}g(\rho)d\rho\right\}dr. \tag{15}$$

已知(可直接核验)$F_{1,n}=B_{1,n}r^{2-n}(n>2)$，$F_{1,2}=A_{1,2}\ln r$，故由(15)可逐次算出(13)的一般结果

$$F_{k,n}=\begin{cases}B_{k,n}r^{2k-n}, & \text{当}n\text{为奇数或}n=2n_1>2k;\\ A_{k,n}r^{2k-n}\ln r, & \text{当}n=2n_1\leqslant 2k.\end{cases} \tag{13'}$$

注意当$2k>n$时，$F_{k,n}\in C^{2k-n-1}(R^n)$。

定理15 若布分f的所有弱导数都属于某固定的$(C_0^m)'$，则f为C^∞函数。

证 只须考虑supp$f$为紧集的情形，因一般情形可利用单位分解化为这种情形：$f=\sum\limits_j a_j f$。记$g=\triangle^k f$，则f可用$\triangle^k$的基本解F表为

$$f=F*g. \tag{16}$$

事实上，$f=\delta*f=(\triangle^k F)*f=F*\triangle^k f=F*g$。取$k$使$2k-n-1\geqslant m$，则$F\in C^m$。因$g=\triangle^k f\in(C_0^m)'$，故分布

$$f=F*g=\langle g(y),F(x-y)\rangle$$

为x的连续函数(对照定理13)。同样得知f的每个弱导数为连续函数，故$f\in C^\infty$。

定理16 设$f\in D'$，若对每个$a\in C_0^m$，m固定，总有$f*a\in C^\infty$，则$f\in C^\infty$。

证 取$h\in D$，使在R^n的某零元邻域中$h=1$。对充分大的k，$hF\in C^{2k-n-1}$，且$\mathrm{supp}\,hF$为紧集。记

$$\triangle^k(hF)=\delta+\varphi.$$

显然$\varphi\in D$。于是$\delta=\triangle^k(hF)-\varphi$，故有

$$f=\delta*f=\triangle^k(hF*f)-\varphi*f, \tag{17}$$

取k使$a=hF\in C^m$，即知$f\in C^\infty$。

注意定理16也可用(16)证得；另一方面，定理15也可利用(17)而得。

定理17 设$g\in C^\infty(\Omega)$，Ω为R^n中开集，f为方程$\triangle^k f=g$在Ω中的分布解，则$f\in C^\infty(\Omega)$。

证 只须考虑Ω为有界集的情形；一般情形可利用单位分解。对Ω的任一开子集ω，只要$\overline{\omega}\subset\Omega$，取点$x=0$的充分小邻域$W$，使$\omega_0-W\subset\Omega$。设$h\in D(W)$，且在$x=0$的某邻域中$h=1$。则$hF*\triangle^k f$在$\omega$上仅依赖于$\omega-W$上的$\triangle^k f$。事实上，考虑一般情形$S*T$。设$\mathrm{supp}\,S=A$为紧集，只须证若在$\Omega_1-A$中$T=0$，则在$\Omega_1$中$S*T=0$。取$\varphi\in D(\Omega)$，则$\mathrm{supp}\,\varphi(x+y)$不与$\mathrm{supp}\,S(x)T(y)$相交，因若不然，即存在一点$(x,y)$，$x+y\in\Omega_1$，且$x\in A$，$y\notin\Omega_1-A$。这是不可能的。故$(S*T)(\varphi)=0$。这表明$S*T$在$\Omega_1$上仅依赖于$\Omega_1-A$上的$T$。故

$\triangle^k f$可换为 g。由于

$$\triangle^k(hF*f)=hF*\triangle^k f=hF*g,$$

再应用(17)，知$f\in C^\infty$.

2.3.4 分布的Fourier变换

对于任一急降函数$\varphi\in S$，其Fourier变换*)

$$F[\varphi]\equiv\widehat{\varphi}(\xi)\equiv\int\varphi(x)e^{-ix\xi}dx,\quad x\xi=x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n$$

总是存在的。设$P(\partial_x)=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha\partial^\alpha$为常系数线性微分算子，则有(读者可自己验算)

$$P(\partial_\xi)\widehat{\varphi}(\xi)=F[P(-ix)\varphi(x)],$$

$$F[P(\partial_x)\varphi(x)]=P(i\xi)\widehat{\varphi}(\xi).$$

由这些公式可推知$\widehat{\varphi}(\xi)\in S(R_n)$，即$\widehat{\varphi}(\xi)$为急降函数。

在经典分析中已得到Fourier变换（以后简称F变换）的反转公式为

$$F^{-1}[\widehat{\varphi}]\equiv(2\pi)^{-n}\int\widehat{\varphi}(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

直接计算表明：若φ在S的有界集中变动，则$F[\varphi]$及$F^{-1}[\varphi]$也在S的有界集中变动。故F为由S到S上的拓扑同构。此外，在$L_2(R^n)$中有

$$\|F[\varphi]\|^2=(2\pi)^n\|\varphi\|^2.$$

这是著名的Parseval等式；一般有

$$\langle\widehat{f},\widehat{g}\rangle=(2\pi)^n\langle f,g\rangle,$$

---

*) 有些书中也采用其它等价形式，例如$F[\varphi]=\int\varphi(x)e^{ix\xi}dx$，等等。

$$\langle f,g\rangle \equiv \int f(x)\,\overline{g(x)}\,dx, \tag{18}$$

其中$f,g\in L_2(R^n)$。由此可定义分布f的F变换$\hat{f}$如下

$$\langle \hat{f},\hat{\varphi}\rangle=(2\pi)^n\langle f,\varphi\rangle, \quad \forall\varphi\in D \tag{19}$$

有时为消去因子$(2\pi)^n$，也可等价地定义为

$$\langle \hat{f},\varphi\rangle=\langle f,\hat{\varphi}\rangle. \tag{19'}$$

定理18 $F:f\to\hat{f}$是S'到S'上的拓扑同构

这是F为S上拓扑同构的对偶结果。

对于任一分布f，也成立如下公式：

$$P(\partial_\xi)\hat{f}=F[P(-ix)f]; \tag{20}$$

$$F[P(\partial_x)f]=P(i\xi)\hat{f}. \tag{21}$$

事实上，由于这些公式对$\varphi\in D$成立，故有

$$\langle P(\partial_\xi)\hat{f},\hat{\varphi}\rangle=\langle\hat{f},\overline{P}(-\partial_\xi)\hat{\varphi}\rangle=(2\pi)^n\langle f,\overline{P}(ix)\varphi\rangle$$

$$=(2\pi)^n\langle P(-ix)f,\varphi\rangle=\langle F[P(-ix)f],\hat{\varphi}\rangle.$$

由φ的任意性，知(20)成立。(21)可类似验证。上式中$\overline{P}$由P对系数取复共轭而得。

容易核验下列诸公式：

$$F[\delta]=1; \qquad F[1]=(2\pi)^n\delta(\xi); \tag{22}$$

$$F[\delta(x-h)]=e^{-ih\xi};$$

$$F[e^{-ihx}]=(2\pi)^n\delta(\xi-h); \tag{23}$$

$$F[P(\partial_x)\delta]=P(i\xi);$$

$$F[P(-ix)\delta]=(2\pi)^nP(\partial_\xi)\delta(\xi). \tag{24}$$

定理19 $F[D]=Z$，$F^{-1}[Z]=D$，且F及F^{-1}为D与Z间

的拓扑同构，这里 $Z=\bigcup_{a=1}^{\infty}Z(a)$（见2.2.1例3）.

证 设$\varphi\in D$，则F变换可延拓为 Fourier-Laplace 变换（即ξ可延拓为复变量$\zeta=\xi+i\eta\in\mathbf{C}^n$）

$$\psi(\zeta)=F[\varphi]=\int\varphi(x)e^{-ix\zeta}dx=\int\varphi(x)e^{-ix\xi}e^{x\eta}dx.$$

因suppφ含于某闭矩块

$$G(a)\equiv\{x:\ |x_j|\leqslant a_j,\quad j=1,\cdots,n\}$$

内，故有

$$|\zeta^k\psi(\zeta)|=\left|\int_{G(a)}e^{-ix\zeta}\partial^k\varphi(x)dx\right|\leqslant C_k'e^{a|\eta|}. \qquad (*)$$

这表明$\psi(\zeta)\in Z(a)$. F显然映$K(a)$ 中有界集为 $Z(a)$ 中有界集，故为连续映射. 为证F映$K(a)$ 到 $Z(a)$ 上，对任一$\psi\in Z(a)$，定义$\varphi(x)$如下：

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=(2\pi)^{-n}\int\psi(\xi)e^{ix\xi}d\xi\\&=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\psi(\xi+i\eta)e^{ix(\xi+i\eta)}d\xi,\end{aligned}$$

积分域的平移是容许的，因由2.2.1例 3 式$(*)$，可对每个ζ_j应用Cauchy积分定理，只要取$k>n$即可. 选$\eta_j=-\delta_j\mathrm{sgn}x_j(j=1,\cdots,n)$，得

$$|\partial^k\varphi(x)|\leqslant B_k|\zeta^k|e^{-\delta|x|+\delta a}.$$

若对某个j有$|x_j|>a_j$，则当 $\delta_j\to\infty$时，$\varphi(x)\to0$。故有$\varphi\in K(a)$。由此知F为$K(a)$到$Z(a)$上的双射。显然F^{-1}也是连续的。定理证毕。

定理20 整函数$F(\zeta)$是台含于球$S_A=\{x:\ |x|\leqslant A\}$ 的分布$f\in D'$（supp$f\subset S_A$)的Fourier-Laplace变换

$$F(\zeta)=\int f(x)e^{-ix\zeta}dx,\quad \zeta=\xi+i\eta,$$

当且仅当：对某常数C及k有

$$|F(\zeta)|\leqslant C(1+|\zeta|)^k e^{A|\eta|}, \tag{25}$$

$F(\zeta)$是$f\in D(S_A)$的Fourier-Laplace变换，当且仅当：对每个正整数N，存在常数$C_N>0$，使

$$|F(\zeta)|\leqslant C_N(1+|\zeta|)^{-N} e^{A|\eta|}. \tag{26}$$

证 先证(25)的必要性。由2.3.2定理7知，对紧台分布f，存在整数$k\geqslant 0$，使

$$|\langle f,\varphi\rangle|\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant k}\max_{x\in S_A}|\partial^\alpha\varphi(x)|, \quad \forall\varphi\in D(S_A). \tag{27}$$

另一方面，对紧台广函f可证

$$\hat{f}(\zeta)=\langle f,e^{ix\zeta}\rangle. \tag{28}$$

事实上，取$\psi\in D(R^n)$，使在S_A上$\psi=1$，则有

$$\langle\hat{f},\hat{\varphi}\rangle=(2\pi)^n\langle f,\varphi\rangle=(2\pi)^n\langle f,\psi\varphi\rangle$$

$$=\langle f(x),\int\hat{\varphi}(\xi)\psi(x)e^{ix\xi}d\xi\rangle=\int\hat{\varphi}(\xi)\langle f,\psi e^{ix\xi}\rangle d\xi$$

$$=\langle\langle f,e^{ix\xi}\rangle,\hat{\varphi}\rangle, \quad \forall\varphi\in D,$$

故(28)当$\zeta=\xi$时成立；它显然可延拓对$\zeta=\xi+i\eta$成立。现在取$h(x)\in C^\infty(R^1)$，使

$$h(x)=\begin{cases}1, & x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right);\\ 0, & x\in(1,\infty),\end{cases}$$

则函数

$$\varphi_\zeta(x)=e^{ix\zeta}h(|\zeta|(|x|-A))$$

属于D，且在S_A的某邻域中重合于$e^{ix\zeta}$。于是由(27)及(28)得

$$|\hat{f}(\zeta)|=|\langle f,e^{ix\zeta}\rangle|\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant k}\max_x|\partial^\alpha\varphi_\zeta(x)|. \tag{29}$$

因在$\operatorname{supp}\varphi_\xi$上有$|x|\leqslant A+|\zeta|^{-1}$，故结合(29)，即得(25)。

(26)的必要性由定理19证明中的式(•)推出。

(26)的充分性也由定理19给出。

为证(25)的充分性，注意由(25)知$F\in S'$，故对某个$f\in S'$，有$F=\widehat{f}$。设$\varphi\in D$，并具性质：

$$\int\varphi(x)dx=1,\quad \varphi\geqslant 0;\quad \operatorname{supp}\varphi=\{x:\ |x|\leqslant 1\}.$$

这种φ当然存在，例如取$\varphi=\varphi(x;A,1,1)$，并选A使得$\int\varphi dx=1$。记

$$\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\tag{30}$$

则整函数$\widehat{\varphi_\varepsilon}\,\widehat{f}=\widehat{\varphi_\varepsilon}F$满足形如(26)的估式，但换$A$为$A+\varepsilon$. 于是有

$$\operatorname{supp}F^{-1}[\widehat{\varphi_\varepsilon}F]\subset S_{A+\varepsilon},$$

但$\widehat{\varphi_\varepsilon}F\to F(\varepsilon\to 0)$。事实上，记$y=\varepsilon x$，有

$$\widehat{\varphi_\varepsilon}(\xi)=\int\varphi_\varepsilon(x)e^{-ix\xi}dx=\int\varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)e^{-ix\xi}dx$$

$$=\int\varphi(y)e^{-i\varepsilon y\xi}dy\to\int\varphi(y)dy=1\quad(\varepsilon\to 0),$$

故当$\varepsilon\to 0$时，$F^{-1}[\widehat{\varphi_\varepsilon}F]=F^{-1}[F]=f$，于是得$\operatorname{supp}f\subset S_A$. 定理证毕。

最后证明关于分布卷积的F变换的一个结果。

定理21 设检试空间Φ具性质：若$\varphi\in\Phi$，则$\overline{\varphi}$及$\varphi(-x)$都属Φ；且容许连续平移，即对任何$h\in R^n$，算子τ_h: $\varphi(x)\to\varphi(x+h)$映$\Phi$到$\Phi$且当$|h|\leqslant 1$时关于$h$一致有界. 记$\Psi=F[\Phi]$.

若$g\in\Psi'$为函数型广函且为Ψ上乘子，则$f=F^{-1}[g]$为Φ上卷子，即：对任一$\varphi\in\Phi$，$f*\varphi\in\Phi$且f：$\varphi\to f*\varphi$为连续映射；而对任一广函$f_1\in\Phi'$，总有

$$F[f*f_1]=\hat{f}\cdot\hat{f}_1. \tag{31}$$

证 先证f为Φ上卷子。对任一$\varphi\in\Phi$，记$\hat{\varphi}=\psi$，有

$$F[\tau_h\varphi]=e^{ih\xi}\psi(\xi),$$

因由$F[\varphi_1]=\psi_1$有$(2\pi)^n\overline{\varphi_1}=F[\overline{\psi_1}]$，$\overline{\varphi_1}$为$\varphi_1$的复共轭，特别取$\varphi_1=\tau_h\varphi$，由上式得

$$(2\pi)^n\overline{\tau_h\varphi}=F[e^{-ih\xi}\overline{\psi}(\xi)]. \tag{32}$$

结合分布F变换定义及(32)，有

$$f*\overline{\varphi}=f(\overline{\tau_x\varphi})=(2\pi)^{-n}(f,F[e^{-ix\xi}\overline{\psi}(\xi)])$$

$$=(2\pi)^{-n}(g,e^{-ix\xi}\overline{\psi}(\xi))=(2\pi)^{-n}\int g(\xi)e^{-ix\xi}\overline{\psi}(\xi)d\xi,$$

即

$$(f*\overline{\varphi})(x)=(2\pi)^{-n}F[g\overline{\psi}](x)=F^{-1}[g\overline{\psi}](-x). \tag{33}$$

因g为Ψ上乘子，故$g\overline{\psi}\in\Psi$，于是(33)的右边属于Φ。由(33)还可得$f*\overline{\varphi}$关于$\overline{\varphi}$的连续性。故f为Φ上卷子。利用(33)，容易得到(31)

$$(F[f*f_1],\overline{\psi})=(f*f_1,F[\overline{\psi}])=(2\pi)^n(f_1,f*\overline{\varphi})$$

$$=(f_1,F[g\overline{\psi}])=(Ff_1,g\overline{\psi})=(g\cdot Ff_1,\overline{\psi}).$$

注2 2.1—2.3. 的主要参考书是：

A. Friedman, *Generalized Functions and Partial Differential Equations*, *Chap*. 1—4, Prentice Hall New Jersey, 1963.

И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, *Обобщённые Функции*, *Выпуск* 2, *Гл*. 1—3, Гос. Изд., Москва, 1958
本章着重于广函理论。关于广函计算及应用，可参考下列诸书：

J. Arsac, *Fourier Trausform and Theory of Distributions*, Prentice Hall, New Jersey, 1966.

H. J. Bremermann, *Distributions, Complex Variables and Fourier Transformation*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1965.

盖尔方特，希洛夫，广义函数，I，科学出版社，1960.

A. H. Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1965.

SIAM J. Appl. Math. 15 (1967) 927—1110, Appl. of Gen. Functions.

2.4 广函的乘法

广函一般不能相乘。但由于技术科学以及理论物理的需要，近年来出现了各种的广函乘法理论。这里作出初步介绍。

2.4.1 量子场论中的广函乘法

如果说量子力学只用到Dirac测度的乘积，那末，在量子场论中就要用到较一般分布的乘积。例如见：T. Ishihara, H. Yamagata, Proc. Japan. Acad. 38(1962) 327—332,333—338, 339—340; S. S. Schweber et al., Mesons and Fields, Acad Press, New York, 1955, Vol. I, Chap. 9, § 1.

这里当然不可能深入量子场论中的乘法问题，但为了初步

了解这个问题的意义，不妨简单地考察一下因果函数的乘积。

由描述 π 介子运动的相对性波动方程（所谓的Klein-Gordon方程）

$$(\square+m^2)u\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+m^2\right)u$$

$$=\delta(x_0,x_1,x_2,x_3)$$

作Fourier变换得

$$(-p_0^2+p_1^2+p_2^2+p_3^2+m^2)\hat{u}(p)=1,$$

$$p=(p_0,p_1,p_2,p_3);$$

$$\hat{u}(p)=\int u(x)e^{-i(x,p)}dx,\quad x=(x_0,x_1,x_2,x_3);$$

$$(x,p)=x_0p_0-x_1p_1-x_2p_2-x_3p_3.$$

函数（记 $p^2=p_0^2-p_1^2-p_2^2-p_3^2$）

$$D^C(x)=(2\pi)^{-4}\int\hat{u}(p)e^{i(x,p)}dp=(2\pi)^{-4}\int\frac{e^{i(x,p)}}{m^2-p^2}dp$$

即称为Klein-Gordon方程的因果函数或Green函数。

显然，$D^C(x)$ 为发散积分。通常改写为

$$D^C(x)=(2\pi)^{-4}\int e^{i(x,p)}D^C(p)dp,$$

$$D^C(p)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{m^2-p^2-i\varepsilon};$$

上述极限在广函意义（弱意义）下理解，而检试空间则取为Schwartz空间 S。

在考虑 π 介子的相互作用时，可表为四维时空 $R^4=\{x_0,x_1,x_2,x_3\}$ 中由点 $x^{(r)}(r=1,\cdots,n)$ 及联结任二点的有向线段 l 作成的图象 G。在构造所谓色散矩阵时须作积

$$\prod_{l=1}^{L} \triangle_l^c(x^{(r)} - x^{(s)}), \qquad (1)$$

$$\triangle_l^c(x) = P_l(D)D^c(x), \quad D = \frac{1}{i}\partial.$$

这里L为有向线段的总数，$P_l(D)$为某些微分多项式。为了计算广函的乘积（1），物理学家采用正规化方法（例如见：Боголюбов, Ларасюк, Acta Math. 97(1957) 227—266），而利用关系式

$$\frac{1}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} = i\int_0^\infty e^{-i\alpha(m^2 - p^2 - i\varepsilon)} d\alpha,$$

于是可改写$D^c(x)$为

$$D^c(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{i}{4^4\pi^2}\int_0^\infty e^{-i\alpha(m^2 - i\varepsilon)} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}i} \frac{d\alpha}{\alpha^2} \qquad (2)$$

$$x^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

在得到上式时，曾利用公式

$$\int_0^\infty e^{\pm i(at^2 + bt)} dt = \frac{1 \pm i}{2\sqrt{2}\, i}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\mp\frac{ib^2}{4a}},$$

算出

$$\int e^{i\alpha p^2 + i(x\cdot p)} dp = \frac{\pi^2}{\alpha^2} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}i}.$$

由(2)知奇性出现于$\alpha = 0$。作正规化

$$\overline{\triangle^c(x)} = \frac{i}{(2\pi)^4}\int e^{i(x\cdot p)} dp\{P(p)$$

$$\times \int_0^\infty I(\alpha)\, e^{i\alpha(p^2 - m^2 + i\varepsilon)} d\alpha\} \qquad (3)$$

其中P为P_l中的任一个，而

$$I(\alpha)=1+\sum_{j=1}^{k}c_j e^{-i\alpha(M_j^2-m^2)},$$

k待适当选定，c_j与M_j则满足代数方程组

$$\begin{cases}1+\sum_{j=1}^{k}c_j=0;\\ m^2+\sum_j c_j M_j^2=0;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ m^{2(k-1)}+\sum_j c_j M_j^{2(k-1)}=0.\end{cases}\tag{4}$$

使得$\alpha=0$为$I(\alpha)$的k重零点，以保证$\overline{\triangle^C(x)}$存在。为证明$\overline{\triangle^C(x)}$在$S'$中弱收敛于$\triangle^C(x)$，取定$\mu_j$，使

$$\triangle(\mu)\equiv\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots\cdots & 1\\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \cdots\cdots & \mu_k^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mu_1^{2(k-1)} & \mu_2^{2(k-1)} & & \mu_k^{2(k-1)}\end{vmatrix}\neq 0,$$

于是线性方程组

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{k}a_j^{(\nu)}=\delta_{0,\nu};\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum_j a_j^{(\nu)}\mu_j^{2(k-1)}=\delta_{k-1,\nu}\end{cases}\qquad \nu=0,1,\cdots,k-1\tag{5}$$

有唯一的非零解$(a_1^{(\nu)},\cdots,a_k^{(\nu)})$，$\nu=0,1,\cdots,k-1$。令$M_j=M\mu_j$，$j=1,\cdots,k$，由(4)和(5)可得：

$$c_j=-\sum_{\nu=0}^{k-1}a_j^{(\nu)}\left(\frac{m}{M}\right)^{2\nu},\quad j=1,\cdots,k,$$

故当$M\to\infty$时，$|c_j|\leqslant C$，C为某个常数。于是对任一个$\varphi\in S$，

可估计差

$$\int\left[\overline{|\triangle^C}(x)-\triangle^C(x)\right]\varphi(x)dx=\sum_{j=1}^{k}c_j\int\triangle^C_{M_j}(x)\varphi(x)dx,$$

$$\triangle^C_{M_j}(x)=e^{-i\alpha(M_j^2-m^2)},$$

但由Parseval等式及Lebesque引理知当$M\to\infty$时有：

$$\int\triangle^C_{M_j}(x)\varphi(x)dx=\int P(p)\widehat{\varphi}(p)dp\frac{i}{(2\pi)^4}$$

$$\times\int e^{-i\alpha(M_j^2-m^2)+i\alpha(p^2-m^2+i\varepsilon)}dx\to0.$$

因c_j都有界，故当$M\to\infty$时，$\overline{|\triangle^C(x)}$在$S'$中收敛于$\triangle^C(x)$，

定理1 对积(1)的每个因子按(3)作正规化，则当$M\to\infty$时，$\prod_{l=1}^{L}\overline{|\triangle^C_l(x^{(r)}-x^{(s)})}$在$S'$中有弱极限存在，而可作为积(1)的定义。

证 只须对$L=2$讨论。因S为F空间，故S'为弱完备的(见2.1.1定理5)。所以只须证明：对任一$\varphi\in S$，数列$\langle\prod_{l=1}^{2}\overline{|\triangle^C_l(x)},\varphi(x)\rangle$收敛。但由于$S$为$FM$空间，而为可分空间(见2.1.2定理11)。今证$S'$为$M$空间。对$S'$中任一有界列$\{f_j\}$，在$S$的可列稠集$\{\varphi_j\}$上，用对角线方法可得收敛子列$\{\langle f_j,\varphi\rangle\}$，这里$\varphi$为列$\{\varphi_j\}$中任一元。事实上，由$|\langle f_j,\varphi_1\rangle|\leqslant C_1$及实或复数域上有界集的相对紧性，知有子列$\langle f_{11},\varphi_1\rangle$，$\langle f_{12},\varphi_1\rangle$，…为收敛列；同样，由于$|\langle f_{1j},\varphi_2\rangle|\leqslant C_2$，可得收敛子列$\{\langle f_{2j},\varphi_2\rangle\}$；如此构造下去，即得列$\{f_{jj}\}$，不妨仍记为$\{f_j\}$，对$\{\varphi_j\}$中每个元$\varphi_\nu$，使$\{\langle f_j,\varphi_\nu\rangle\}$当$j\to\infty$时收敛。但$\{\varphi_\nu\}$为$S$中稠集，故也在每个$S_l$中稠，这里$S_l$是$S$依范$\|\varphi\|_l$

的完备化。另一方面，因$\{\langle f_j,\varphi\rangle\}$有界，据2.1.1定理4及定理3，乃按某范$\|f\|_l$有界。今证$\{f_j\}$对每个$\varphi\in S_l$收敛。不妨只就收敛于零来讨论。因$\{\varphi_j\}$在$S_l$中稠，对任一$\varphi\in S_l$及$\varepsilon>0$，有$\{\varphi_{j(\varepsilon)}\}$，使

$$\|\varphi-\varphi_{j(\varepsilon)}\|_l<\frac{\varepsilon}{2N}.$$

这里N是$\{f_j\}$在S_l'中按范$\|f\|_l$的界

$$\|f_j\|_l\equiv\sup_{\|\varphi\|_l=1}|\langle f_j,\varphi\rangle|\leqslant N.$$

取j_0充分大，使$|\langle f_j,\varphi_{j(\varepsilon)}\rangle|<\frac{\varepsilon}{2}$，$\forall j\geqslant j_0$。于是有

$$\begin{aligned}|\langle f_j,\varphi\rangle|&=|\langle f_j,\varphi_{j(\varepsilon)}\rangle+\langle f_j,\varphi-\varphi_{j(\varepsilon)}\rangle|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+N\frac{\varepsilon}{2N}=\varepsilon,\end{aligned}$$

故$\{f_j\}$确对每个$\varphi\in S_l$收敛。由S_l'及S'的完备性知极限$f\in S_l'\subset S'$，即S'为M空间。

因此，为证列$\{\langle\Pi\,\overline{|\triangle_i^c(x)}, \varphi(x)\rangle\}$收敛，只须证这个列对$M$一致有界，这里$M=\frac{M_j}{\mu_j}$。但这是显然的，因由

$$\langle\prod_{j=1}^{2}\overline{|\triangle_i^c(x)},\varphi(x)\rangle=\frac{i^2}{(2\pi)^4}\int P_1(p)P_2(p)\,\widehat{\varphi}(p)dp$$

$$\times\int I_1(\alpha)I_2(\alpha)\,e^{i\alpha(p^2-m^2+i\varepsilon)}d\alpha$$

据$\widehat{\varphi}(p)$的急降性及Lebesgue引理，知上式对S的有界集中的φ关于M为一致有界的。定理证明完毕。

注1 关于因果函数的乘积问题，近来仍有讨论，例如见：

G. Braunss R. Liese, J. D. E., 16(1974) 399—412, 25(1977) 145—147; J. K. Thurber, J. Katz, Lecture Notes in Math. V. 369, 1974, 272—302.

诚然，定理 1 给出了某些广函的乘积，但只限于因果函数型的广函。所以下面还要作一些较一般的讨论。

2.4.2 结合性乘法的不存在性

在讨论一般广函的乘法问题之前，有必要注意到一个否定的结果 (L. Schwartz, C. R. Paris, 239 (1954)847—848)，即：D' 上不存在具结合性的乘法运算。为了严格证明这个结论，先证明几个引理。

引理1 设E为定义于实轴的广函空间，而包含连续函数空间E_0，则E上不存在乘法运算，使下列性质同时成立：1)结合性；2)在E_0上归为通常乘法；3)E中有单元 1；4)有元x^{-1}及$\delta \neq 0$，使$x^{-1}x = 1$，$x\delta = 0$。

证 若具上述四个性质的乘法运算存在，必引致矛盾如下：

$$0 = x^{-1}(x\delta) = (x^{-1}x)\delta = \delta \neq 0.$$

引理2 记$E_1 = C^2(R^1)$，并设$E_1 \subset E$。若E定义有乘法运算而具性质：1)有单元1；2)在E_0上归为通常乘法；此外，若在E上还定义有微分运算面具性质：a) 在E_1上归为通常微分运算；b) $(fg)' = f'g + fg'$，则当记 $f = x(\ln|x| - 1)$ 时，有

$$f''x = xf'' = 1 \quad 即 \quad f'' = x^{-1}.$$

证 容易计算

$$f''x = (fx)'' - 2f'x' - fx'' = (fx)'' - 2f',$$

但$(fx)' = 2f + x$，$(fx)'' = 2f' + 1$，故确有$f''x = 1$；类似可证

$xf''=1$.

引理3 若$E\supset E_0$，且E上有乘法运算及微分运算，具引理 1 及 2 所述性质，则E中不存在元$\delta\neq 0$，使$x\delta=0$.

证 若不然而有$\delta\neq 0$，使$x\delta=0$，则取$x^{-1}=f''$，f如引理 2 中所述，由引理 1 及 2 即得矛盾。

定理2 在分布空间D'上不存在具结合性的乘法运算。

证 显然有$D'\supset E_0$，且D'上微分运算具备引理 2 所述性质，同时引理 1 中性质2)—3)是必然的。此外，据引理 2 知对x有逆元$x^{-1}=f''$存在。若D'上存在具结合性的乘法运算，则因D'中含元$\delta=\frac{d^2}{dx^2}|x|\neq 0$，且使$x\delta=0$：

$$x\left(\frac{d^2}{dx^2}|x|\right)=(x|x|)''-2\frac{d}{dx}|x|$$

$$=2\frac{d}{dx}|x|-2\frac{d}{dx}|x|=0,$$

故由引理 1 知引出矛盾。

尽管定理 2 否定了D'上结合性乘法运算的存在性，但对于特殊类型的广函乘法及非结合性乘法或其它类型乘法运算，并非是完全不可能的。正如König 在 Math. Ann. 128(1955) 420—452中所说，可建立多种的广函乘法体系。问题在于是否符合物理实际。

现在附带讨论有限阶分布与适当光滑函数的乘积问题。为简单计，仅以一维情形为例。

设定义于有限间隔 $[a,b]$ 的分布f_1为通常的m次连续可微函数（也可称f_1为一m阶分布），记$F_1=f_1^{(m)}$。若f_2为m阶分布，即$f_2=F_2^{(m)}$，这里$F_2(x)$为定义于$[a,b]$的连续函数，则积f_1f_2可如下定义：

$$f_1 f_2 = f_1 F_2^{(m)} = (f_1 F_2)^{(m)} - m(f_1' F_2)^{(m-1)} + \cdots$$
$$+ (-1)^k \binom{m}{k} (f_1^{(k)} F_2)^{(m-k)} + \cdots + (-1)^m f_1^{(m)} F_2. \tag{6}$$

事实上，上式右边每一项都是 $[a,b]$ 上的分布，故其代数和亦然。例如，分布 $(f_1^{(k)} F_2)^{(m-k)}$ 如下作用：

$$\langle (f_1^{(k)} F_2)^{(m-k)}, \varphi \rangle = (-1)^{m-k} \langle f_1^{(k)} F_2, \varphi^{(m-k)} \rangle,$$
$$\forall \varphi \in D([a,b]),$$

由于 $f_1^{(k)} F_2$ 为连续函数，上式右边有意义。

在开域 I 或无限域 I 的情形，可对 I 中任一间隔 $[a,b]$，用 $f_{[a,b]}$ 记分布 $f \in D'(I)$ 在 $[a,b]$ 上的缩射，即：对任一 $\varphi \in D([a,b])$，使 $\langle f, \varphi \rangle = \langle f_{[a,b]}, \varphi \rangle$。若对 $D'(I)$ 中任二分布 f_1 及 f_2，它们在任意间隔 $[a,b] \subset I$ 上的缩射 $f_{1[a,b]}$ 及 $f_{2[a,b]}$ 的积有定义，则称 $f_1 f_2$ 在 I 上有定义。

容易核验，定义式(6)当 $f_1 \in \mathscr{E}$ 时等价于2.2.3定义5：

$$(f_1 f_2, \varphi) = (f_2, f_1 \varphi)$$
$$= (-1)^m \int_a^b F_2(x) [f_1(x) \varphi(x)]^{(m)} dx.$$

由于不必限定 f_1 为乘子，定义式(6)当然更广泛些。由(6)也不难推出公式

$$(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$$

且上式左、右边的三个乘积，当右边二积之一有定义时，都有意义。特别当 $h(x) \in C^m$ 时，可得结果：

$$h(x)\delta(x) = h(0)\delta(x);$$
$$h(x)\delta^{(m)}(x) = h(0)\delta^{(m)}(x) - mh'(0)\delta^{(m-1)}(x)$$
$$+ \cdots + (-1)^m h^{(m)}(0)\delta(x). \tag{6'}$$

关于有限阶广函的乘积，有较多讨论，见

König, H., Abh. Bayer. Akad. Wiss. Math. No. 82 (1957), 80S.

Itano, M., Hirosh Math. J. 6(1976)365—375.

Fisher. B., Math. Ann. 203(1973) 103—116; Math. Nachr. 108(1982)117—127.

Güttinger. W., SIAM J. Appl. Math., 15 (1967)929—943.

Bredimas, A., Lett. Nuovo Cim. 13:16 (1975) 601—604.

K.Keller, Rep. Math. Phys. 14:3(1978)285—305.

Kaminski, A., Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astr. 25:4(1977)369—379.

2.4.3 复变函数方法

近年来出现的各种乘法理论，各依据不同的处理途径。这里先介绍复变函数方法。为简单起见，仍以一维情形为例。

先作一些预备性的讨论。

定理3 若$f\in\mathscr{E}'$，即f具紧台，则函数

$$f^0(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(f,\frac{1}{x-z}\right) \tag{7}$$

有定义，且在$z=x+iy$平面上除f的台$[a,b]$外，为z的解析函数；当$z\to\infty$时，$f^0(z)\to 0$。

注2 $f^0(z)$称为**分布 f 的 Cauchy积分**。定理 3 的逆不成立。例如函数$e^{\frac{1}{z}}-1$，除$z=0$外，为解析的，当$z\to\infty$时，它也趋于零，但不存在分布$f\in\mathscr{E}'$，使$f^0(z)=e^{\frac{1}{z}}-1$.事实上，若有$f\in\mathscr{E}'$具所述性质，则有

$$f=\sum_{j=1}^{N}a_j\delta^{(j)}(x),$$

于是

$$f^0(z)=\sum_{j=1}^{N}a_jz^{-j},$$

而以$z=0$为有限重极点，例如 $e^{\frac{1}{z}}-1$以$z=0$为本性奇点。

证 当$\mathrm{Im}z=y\neq 0$时，$\frac{1}{x-z}\in\mathscr{E}$，故$\left(f,\frac{1}{x-z}\right)$对所有使$y\neq 0$的$z$有定义，且

$$\frac{\partial}{\partial z}f^0(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f^0(z+h)-f^0(z)}{h}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{h\to 0}\left(f,\frac{1}{(x-z-h)(x-z)}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left(f,\frac{1}{(x-z)^2}\right)$$

也存在，故 $f^0(z)$ 当 $\mathrm{Im}z\neq 0$ 时为z的解析函数。显然，$\left(f,\frac{1}{x-z}\right)$当$z=x$但不属$\mathrm{supp}f=[a,b]$时仍有意义。故 $f^0(z)$ 在$[a,b]$ 外为z的解析函数。当$z\to\infty$时，$\frac{1}{x-z}$及其各阶导数对所有的$x\in[a,b]$一致趋于零，即$\frac{1}{x-z}$当$z\to\infty$时在$\mathscr{E}$中趋于零。故$f^0(z)$作为$\mathscr{E}$上连续线性泛函也当$z\to\infty$时趋于零。

推论1 记 $f^{(n)0}(z)$为f的弱导数$f^{(n)}$的Canchy积分，则有

$$f^{(n)0}(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(f^{(n)},\ \frac{1}{x-z}\right)$$

$$=\frac{(-1)^n}{2\pi i}\left(f,\frac{\partial^n}{\partial x^n}\ \frac{1}{x-z}\right)=\frac{\partial^n}{\partial z^n}f^0(z)$$

定理4 若$f\in\mathscr{E}'$，则对任一个$\varphi\in D$，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}[f^0(x+i\varepsilon)-f^0(x-i\varepsilon)]\varphi(x)dx=(f,\varphi). \tag{8}$$

证 记(7)左边的积分为$I(\varepsilon)$，它显然存在：

$$I(\varepsilon)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(\xi),\ \frac{1}{\xi-x-i\varepsilon}-\frac{1}{\xi-x+i\varepsilon}\right)\varphi(x)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\left(f,\frac{2i\varepsilon}{|\xi-x+i\varepsilon|^2}\right)\varphi(x)dx$$

$$=(f,\varphi^0(\xi+i\varepsilon)-\varphi^0(x-i\varepsilon)).$$

这里$\varphi^0(z)$为$\varphi(x)$的 Cauchy 积分。上式中积分顺序的交换是合法的，因f及φ都具紧台。今证

$$\lim_{\varepsilon\to 0-}\frac{\partial^n}{\partial z^n}[\varphi^0(x+i\varepsilon)-\varphi^0(x-i\varepsilon)]=\varphi^{(n)}(x),$$

$$n=0,1,\cdots \tag{9}$$

事实上，对任意$\delta>0$，可改写

$$\varphi^0(x+i\varepsilon)-\varphi^0(x-i\varepsilon)=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-\infty}^{x-\delta}+\int_{x-\delta}^{x+\delta}+\right.$$

$$\left.+\int_{x+\delta}^{\infty}\right\}\varphi(\xi)\ \frac{2i\varepsilon}{|\xi-x+i\varepsilon|^2}d\xi,$$

记suppφ的长度为L。因$|\varphi(x)|\leqslant M$，沿$(-\infty,x-\delta)$及$(x+\delta,\infty)$的积分的绝对值之和不超过$2ML\varepsilon/\delta^2$。不妨设$\varphi(x)$取实值(取复值时，对实、虚部分别估计)，有

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta}\varphi(\xi)\frac{2i\varepsilon}{|\xi-x+i\varepsilon|^2}d\xi=\varphi(\xi_0)\int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{2i\varepsilon d\xi}{|\xi-x+i\varepsilon|^2}$$

$$=\varphi(\xi_0)\int_\Gamma\frac{1}{z-x}dz.$$

这里ξ_0为$(x-\delta,x+\delta)$中某点，而Γ则由联结点$x-\delta-i\varepsilon$与$x+\delta-i\varepsilon$的有向线段及联结点$x+\delta+i\varepsilon$与$x-\delta+i\varepsilon$的有向线段组成。为了使Γ成为闭路Γ_1，可加上沿从$x-\delta+i\varepsilon$到$x-\delta-i\varepsilon$及从$x+\delta-i\varepsilon$到$x+\delta+i\varepsilon$的相应积分。这两项积分绝对值的和不超过$\frac{4\varepsilon}{\delta}$。但

$$\oint_{\Gamma_1}\frac{dz}{x-z}=2\pi i,$$

故得

$$\left|\varphi(x)-\frac{1}{2\pi i}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\varphi(\xi)\frac{2i\varepsilon}{|\xi-x+i\varepsilon^2|}d\xi\right|$$

$$<|\varphi(x)-\varphi(\xi_0)|+\frac{2M}{\pi}\frac{\varepsilon}{\delta}.$$

记$\varphi(x)$在长为2δ的区间上的最大变差为$m(\delta)$。因$\varphi\in D$，$\lim\limits_{\delta\to 0}m(\delta)=0$。据$m(\delta)$的定义知$|\varphi(x)-\varphi(\xi_0)|\leqslant m(\delta)$。结合所得诸估计式，有

$$|\varphi^0(x+i\varepsilon)-\varphi^0(x-i\varepsilon)-\varphi(x)|$$

$$<\frac{2ML\varepsilon}{\pi\delta^2}+m(\delta)+\frac{4M\varepsilon}{\pi\delta}.$$

取$\delta=\varepsilon^{\frac{1}{3}}$，上式右边当$\varepsilon\to 0$时趋于零。因所有估式不依赖$x$，故$\varphi^0(x+i\varepsilon)-\varphi^0(x-i\varepsilon)$一致趋于$\varphi(x)$。类似可证（9）一般成立。限定于supp$f$上，由(9)知$\varphi^0(x+i\varepsilon)-\varphi^0(x-i\varepsilon)$依$D$中

拓扑收敛于$\varphi(x)$。故(8)成立。

定理5 设$f\in\mathscr{E}'$，则对顺时针方向绕$\text{supp}f$的任一简单闭曲线C_0，有

$$(f,1)=\oint_{C_0}f^0(z)dz. \tag{10}$$

证 记$\text{supp}f=I$。不妨设I为一个间隔（有限个间隔情形可类似讨论）。对I的任一子域(a,b)，有

$$(f,1)=\lim_{\varepsilon\to0+}\int_a^b[f^0(x+i\varepsilon)-f^0(x-\varepsilon)]dx$$

$$=\lim\int_{C(\varepsilon)}f^0(z)dz.$$

这里取$\varphi\in D$，在(a,b)上$\varphi=1$；$C(\varepsilon)$则由从点$a+i\varepsilon$到$b+i\varepsilon$及从点$b-i\varepsilon$到$a-i\varepsilon$的有向线段组成，加上沿从$a-i\varepsilon$到$a+i\varepsilon$及从$b+i\varepsilon$到$b-i\varepsilon$的相应积分，得沿闭路C^*的积分。由于$f^0(z)$的解析性，它在有界域上是有界的。对给定的$\frac{\delta}{2}$，取$\varepsilon>0$充分小，可使所加积分的绝对值小于$\frac{\delta}{2}$。结合上面的极限式，得

$$\left|(f,1)-\oint_{C^*(\varepsilon)}f^0(z)dz\right|<\delta.$$

因$f^0(z)$在I外为解析函数，故对定理所述的任一闭路C_0，有

$$\oint_{C_0}f^0(z)dz=\oint_{C^*(\varepsilon)}f^0(z)dz,$$

于是得

$$\left|(f,1)-\oint_{C_0}\varphi^0(z)dz\right|<\delta,$$

且估式与ε无关。由于δ的任意性，知(10)成立。

注3 (10)式左、右边的1分别换为$\varphi(x)$及$\varphi^0(z)$时一般不相等。事实上，

$$(f,\varphi)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}[f^0(x+i\varepsilon)-f^0(x-i\varepsilon)]$$
$$\times[\varphi^0(x+i\varepsilon)-\varphi^0(x-i\varepsilon)]dx,$$

$$\oint_{C_0}f^0(z)\varphi^0(z)dz=\int_{-\infty}^{\infty}[f^0(x+i\varepsilon)\varphi^0(x+i\varepsilon)$$
$$-f^0(x-i\varepsilon)\varphi^0(x-i\varepsilon)]dx,$$

它们一般是不同的。

自然会想到是否可换$\varphi^0(z)$为$\varphi(z)$。这引出如下的考虑。

定义1 以$\mathscr{A}$记整函数空间，$\mathscr{A}_b(0<b\leqslant\infty)$记带域$S_b=\{z;\ |\mathrm{Im}z|<b\}$中的解析函数空间；显然有

$$\mathscr{A}=\mathscr{A}_\infty;\qquad \mathscr{A}\subset\mathscr{A}_b\subset\mathscr{E}$$

并赋以由$\mathscr{E}$引出的导拓扑；在后一包含关系中，乃对实变量函数而论。

定义2 以C_0记顺时针方向绕给定紧台分布的台的任一简单闭曲线；以C_p记实轴上、下依正向进行而与实轴平行的二有向直线；以C_a记在实轴上、下各依正、负向进行而与实轴平行的二直线。

定理6 设$f\in\mathscr{E}'$，$\varphi\in\mathscr{A}_b$，则对任何$C_0\subset S_b$，有：

$$(f,\varphi)=\oint_{C_0}f^0(z)\varphi(z)dz.\tag{11}$$

若$f^{(n)}=O\left(\frac{1}{|x|}\right)$，$n=0,1,\cdots,\varphi\in O\left(\frac{1}{|z|}\right)$，则对任何$C_a\subset S_b$，有

$$(f,\varphi)=\int_{C_a}f^0(z)\varphi(z)dz.\tag{12}$$

证明完全类似于定理5的证明，故略去。

下面进入紧台分布乘法运算的讨论。

乘法定义1 设$f,g\in\mathscr{E}'$，定义积$f①g$如下：

$$(f①g,\varphi)=\oint_{C_0}f^0(z)g^0(z)\varphi(z)dz,$$

$$\forall\varphi\in\mathscr{A}_b,\quad C_0\subset S_b.$$

这里C_0含supp$f$及supp$g$的并于所围域内。

不难核验，$f①g$确作成$\mathscr{A}_b$上连续线性泛函；且乘法为交换的及结合的；由于$f=1$及$g=x$都无相应Cauchy积分存在，故这种乘法运算的存在并不与定理2矛盾。

乘法定义2 若$f\in D'$且$f^0(z)$存在，记

$$f^1(z)=\begin{cases}f^0(z), & \operatorname{Im}z>0;\\ -f^0(z), & \operatorname{Im}z<0,\end{cases}$$

而称为f的解析延拓，因

$$(f,\varphi)=\int_{C_a}f^0(z)\varphi(z)dz=\int_{C_p}f^1(z)\varphi(z)dz,$$

$$\forall\varphi\in\mathscr{A}_b.$$

可定义积$f②g$如下（当然要求$g^0(z)$存在）：

$$(f②g,\varphi)=\int_{C_p}f^1(z)g^1(z)\varphi(z)dz$$

若f或g具紧台，且$\varphi(z)=O\left(\frac{1}{|z|}\right)$，上面的积分存在，而确定$f②g$为

$$\mathscr{A}_b^1=\left\{\varphi:\ \varphi=O\left(\frac{1}{|z|}\right),\ \varphi\in\mathscr{A}_b\right\}$$

上广函，可核验这种乘法运算也有交换性及结合性；同样不与

定理 2 相矛盾。

定理7 设$f,g\in\mathscr{E}'$，则

$$(f①g,1)=0;\qquad (f②g,1)=0.$$

证 因$f^0(z)$及$g^0(z)$分别在 supp$f$ 及 supp$g$ 外为解析函数，且当$z\to\infty$时都趋于零，故积

$$f^0(z)g^0(z)=f^1(z)g^1(z).$$

当$z\to\infty$时至少具阶$O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$，于是

$$\oint_{C_0}f^0(z)g^0(z)dz=0\quad(C_0\to\infty),$$

即 $(f①g,1)=0$。对于$\int_{C_p}f^1(z)g^1(z)dz$，因被积函数当$z\to\infty$时至少具阶$O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$。使$C_p$的二平行直线无限远离（这时$b=\infty$），所论积分也趋于零，故$(f②g,1)=0$。

由这个定理知上述两种乘法运算在连续函数情形并不归为通常的乘法运算。

乘法定义3 设$f,g\in D'$，使$f^0(z)$，$g^0(z)$存在，定义

$$(f③g,\varphi)=\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{-\infty}^{\infty}[f^0(x+i\varepsilon)-f^0(x-i\varepsilon)]$$

$$\times[g^0(x+i\varepsilon)-g^0(x-i\varepsilon)]\varphi(x)dx,\quad\forall\varphi\in D$$

显然，当f及g为连续函数且$f^0(z)$及$g^0(z)$存在时，上述乘法归为通常乘法；但 1 无 Cauchy 积分存在。对一般分布，上述乘积可能失去意义。

例1 考察$\delta③\delta$。据定义有$\left(\delta^0(z)=\left(\delta,\frac{1}{x-z}\right)=\frac{-1}{z}\right)$，

$$(\delta ③ \delta, \varphi) = \frac{-1}{4\pi^2} \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x+i\varepsilon} - \frac{1}{x-i\varepsilon} \right)^2 \varphi(x) dx$$

$$= \frac{-1}{4\pi^2} \lim \int \left\{ \frac{1}{(x+i\varepsilon)^2} + \frac{1}{(x-i\varepsilon)^2} + \frac{1}{i\varepsilon} \left(\frac{1}{x+i\varepsilon} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{x-i\varepsilon} \right) \right\} \varphi(x) dx$$

$$= \frac{-1}{4\pi^2} \int 2\mathrm{v.p.} \left(\frac{1}{x^2} \right) \varphi(x) dx - \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \{ (\delta, \varphi) + 0(\varepsilon) \}.$$

这里v.p. $\left(\frac{1}{x^2}\right)$表示$\frac{1}{x^2}$的主值（或正规化），故上式右边第一项为有限值；而第二项的极限不存在，故$\delta ③ \delta$无定义。

例2 $$\delta ③ \mathrm{v.p.} \frac{1}{x} = \frac{-1}{2} \delta'(x). \tag{13}$$

事实上，因v.p. $\frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+i\varepsilon} + \frac{1}{x-i\varepsilon} \right)$，有

$$\left(\delta ③ \mathrm{v.p.} \frac{1}{x}, \varphi \right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{-1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x+i\varepsilon} - \frac{1}{x-i\varepsilon} \right)$$

$$\times \left(\frac{1}{x+i\varepsilon} + \frac{1}{x-i\varepsilon} \right) \varphi(x) dx$$

$$= \frac{-1}{4\pi i} \lim \int \left[\frac{1}{(x+i\varepsilon)^2} - \frac{1}{(x-i\varepsilon)^2} \right] \varphi(x) dx$$

$$= \frac{-1}{2} \int \delta'(x) \varphi(x) dx.$$

这里用到关系式

$$\delta'^{0}(z) = \left(\delta', \frac{1}{x-z} \right) = \left(\delta, \frac{1}{(x-z)^2} \right) = \frac{1}{z^2}.$$

这个例给出量子力学中用到的结果。

本段所论也可用于较一般情形；在例1中可尝试取Hadamard意义下的发散积分的有限部分而定义

$$\overline{\delta}\circledS\overline{\delta}=\frac{-1}{2\pi^2}\text{v.p.}\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

但这个结果不是量子力学所需要的。

关于复变函数方法的详细讨论，可见

H.Bremermann, L.Durand, J.Math. Phys. 2(1961) 240—258;

M.Itano, J.Sci. Hiroshima Univ. Ser. AI, 30(1966) 151—181;

A. Bredimas, J. Math. Pure et Appl. (9) 56(1977) 479—491;

C. L. Sabharwal, SIAM J. Appl. Math. 18 (1970) 503—510;

A.Sloan, Pacif. J.Math. 79(1978)207—224.

2.4.4 正规列方法

现在介绍Mikusinski (Studia Math 20(1961) 163—169)用正规列处理广函积问题的方法*)。这个方法有相当的概括性与实用性。

先作预备性讨论。

定义3 若在任一矩块 $G(a,b)\equiv\{x: a_j\leqslant x_j\leqslant b_j, j=1,\cdots,n\}$ 上，对给定的函数列 $\{\varphi_\nu\}\subset\mathscr{E}$，存在正整数$k$及列 $\{\Phi_\nu\}\subset\mathscr{E}$，使$\varphi_\nu=\Phi_\nu^{(k)}$，且列$\{\Phi_\nu\}$在$G$上一致收敛，则称列$\{\varphi_\nu\}$为**基础列**。二基础列$\{\varphi_\nu\}$及$\{\psi_\nu\}$若使列$\varphi_1,\psi_1,\varphi_2,\psi_2,\cdots$

*) 也可见H.F. Walter. Math. Ann. 189(1970) 211—221.

仍为基础列，即称为**等价列**。

注意列$\{\Phi_\nu\}$在R^n上不一定一致收敛，因而列$\{\varphi_\nu=\Phi_\nu^{(k)}\}$更不必在$R^n$上一致收敛，故$\{\varphi_\nu\}$不必收敛于连续函数。今证明。**$R^n$上所有等价基础列确定有限阶分布**。为此只须证每个等价基础列对应于某连续函数的有限阶弱导数。

记等价基础列$\{f_\nu(x)\}$所定义的元素为$f\equiv[f_\nu]$。由于在任一矩块上总存在$\{f_\nu\}$的等价多项式列$\{P_\nu(x)\}$，可如下定义f的m阶导数：$f^{(m)}=[P_\nu^{(m)}(x)]$。事实上：1）$\{P_\nu^{(m)}\}$确为基础列。因由$P_\nu=F_\nu^{(k)}(x)$有$P_\nu^{(m)}=F_\nu^{(m+k)}$，且$\{F_\nu\}$在任一矩块上一致收敛；2）若$\{f_j\}$及$\{g_j\}$为等价基础列，且$\{f_j^{(m)}\}$及$\{g_j^{(m)}\}$也是基础列，则这两个列也必等价。因由$f_\nu=F_\nu^{(k)}$及$g_\nu=G_\nu^{(k)}$有$f_\nu^{(m)}=F_\nu^{(k+m)}$及$g_\nu^{(m)}=G_\nu^{(k+m)}$，且$\{F_\nu\}$与$\{G_\nu\}$为等价的。因此，象前面那样地定义$f$的导数，是有意义的。

由导数的上述定义特别可推知：若$\{f_\nu^{(m)}\}$为基础列，则有

$$f^{(m)}=[f_\nu(x)]^{(m)}=[f_\nu^{(m)}(x)].$$

事实上，若$f_\nu(x)=P_\nu(x)$，则$[f_\nu^{(m)}(x)]=[P_\nu^{(m)}(x)]=f^{(m)}$.

据上所论，对给定的元素$f=[f_\nu(x)]$，$f_\nu(x)=F_\nu{}^{(k)}(x)$，这里$\{F_\nu\}$在任一矩块上一致收敛于$F(x)$；$F(x)=[F_\nu(x)]$，应有

$$\begin{aligned}f&=[f_\nu(x)]=[F_\nu^{(k)}(x)]=[F_\nu(x)]^{(k)}\\&=F^{(k)}(x)\end{aligned}$$

故f确为在任一矩块上连续的函数$F(x)$的有限阶导数，而据2.2.2式(7)及2.2.3定义6知f为有限阶分布。

定义4 若由$\mathscr{E}\times\cdots\times\mathscr{E}$到$\mathscr{E}$的算子$R(\varphi,\cdots,\psi)$具性质：当$\{\varphi_\nu\},\cdots,\{\psi_\nu\}$为基础列时，$\{R(\varphi_\nu,\cdots,\psi_\nu)\}$也是基础列，

即称R为正规算子。

可核验，下列算子都是正规的：

1．加、减运算 $\varphi(x)\pm\psi(x)$；

2．以数c相乘 $c\varphi(x)$；

3．以固定函数$\omega(x)\in\mathscr{E}$相乘 $\omega(x)\varphi(x)$；

4．以固定函数$\omega(x)\in D$作卷积 $\omega*\varphi$；

5．不定积分 $\int_x^y\varphi(t)dt$.

据定义4，由基础列的等价类

$$R(f,\cdots,g)=[R(f_\nu,\cdots,g_\nu)]$$

可延拓正规算子的作用于分布$f=[f_\nu],\cdots,g=[g_\nu]$.

定义5 不是正规算子的算子，称为非正规算子。

重要的非正规算子有如下几种：

6．乘法 $\varphi(x)\psi(x)$；

7．合成 $\varphi(\psi(x))$；

8．卷积 $\varphi(x)*\psi(x)$；

9．定积分 $\int_G\varphi(x)dx$；

10．Fourier 变换 $\int\varphi(x)e^{-ix\xi}dx$.

读者应注意3与6的区别、4与8的区别在于ω的特殊性；也应注意5与9的区别。

为了延拓非正规算子于分布，引进正规列。

定义6 具下述性质的基础列称正规列：

1）正规列的每个子列仍为正规列；

2）若$\{\varphi_\nu\}$及$\{\psi_\nu\}$为等价正规列（即定义同一分布），则$\varphi_1,\psi_1,\varphi_2,\psi_2,\cdots$也是正规列，并确定同一分布；

3）若某分布在某矩块上为连续函数，则确定它的每一正

规列在此矩块的任一个子矩块上一致收敛；

4）若某分布f在某矩块上为局部L可积函数，则其相应的每一正规列$\{f_\nu(x)\}$在此矩块上为L收敛的，即：$\{f_\nu(x)\}$在此矩块上殆遍收敛，且在此矩块的每个子矩块G上，$\int_G f_\nu(x)dx$关于G一致收敛。

注意定义 6 中的要求1)及2)在于保证延拓

$$R(f,\cdots,g)\to[R(f_\nu,\cdots,g_\nu)]$$

的唯一性，其中$f=[f_\nu(x)],\cdots,g=[g_\nu(x)]$为分布；而要求3)及4)则分别保证算子$R$的连续性及可积性。

可核验，在前面所列十种运算中，1--7 及9（当G为紧集）保持连续性，即：若列$\{\varphi_j\},\cdots,\{\psi_j\}\subset\mathscr{E}$在每个矩块上分别一致收敛于$\varphi,\cdots,\psi$，则列$\{R(\varphi_\nu,\cdots,\psi_\nu)\}$在同样意义下收敛于$R(\varphi,\cdots\psi)$；而 1—5及9（当$G$为紧集）保持可积性，即，若$\varphi_\nu,\cdots,\psi_\nu\in\mathscr{E}$分别$L$收敛于局部$L$可积函数$\varphi,\cdots,\psi$，则列$\{R(\varphi_\nu,\cdots,\psi_\nu)\}$也$L$收敛于$R(\varphi,\cdots,\psi)$。至于运算 8 及 10，则既不能保持连续性，也不能保持可积性。

为了能延拓非正规算子于分布，先构造δ分布的正规列。取

$$\delta_\nu(x)\in\mathscr{E};\ \delta_\nu(x)\equiv 0,\quad x\in\left(-\frac{1}{2}\rho_\nu e,\ \frac{1}{2}\rho_\nu e\right),$$

其中$\rho_\nu>0$，$\rho_\nu\to 0\ (\nu\to\infty)$；$e=(1,\cdots,1)$；而使

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\nu(x)dx=1;\quad |\delta_\nu(x)|<\frac{M}{\rho_\nu^n}.$$

这种列显然存在，并作成δ分布的正规列。事实上，$\{\delta_\nu(x)\}$确为基础列，而满足定义 3 中要求及定义 6 中性质1)与2)；由于δ分布既非连续又非可积，故可认为定义 6 中性质3) 及4) 也

成立。

对于任何分布$f\in D'$，可如下构造正规列：

$$f_\nu=f*\delta_\nu,\quad \nu=1,2,\cdots$$

易核验$\{f_\nu\}$确为基础列并满足定义 6 中的要求 1)—3)。为核验4)，假定f为局部L可积函数(不然，可认为4)已成立，有如上面对δ_ν所述)。于是对殆遍的点$x_0\in R^n$有

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\rho^n}\int_{I_\rho}f(x_0-t)dt=f(x_0).$$

这里 $I_\rho=\left(-\frac{1}{2}\rho e,\ \frac{1}{2}\rho e\right)$。现在证明，对点$x_0$有

$$\lim_{\nu\to\infty}f_\nu(x_0)=f(x_0).$$

不妨设$f(x_0)=0$。可估计

$$|f_\nu(x_0)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(x_0-t)\delta_\nu(t)|dt$$

$$\leqslant\frac{M}{\rho_\nu^n}\int_{I_{\rho_\nu}}|f(x_0-t)|dt\to 0.$$

此外

$$\int_a^x f_\nu(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_a^x dt\int_{-\infty}^{\infty}[f(t-\tau)-f(t)]\delta_\nu(\tau)d\tau$$

$$=\int_{I_\rho}[F(x-\tau)-F(x)]\delta_\nu(\tau)d\tau;$$

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

由于$F(x)$为连续函数，上式表明$\int_a^x f_\nu(t)dt$在任一矩块上一致收敛于$\int_a^x f(t)dt$。故4)成立。

建立了任一分布的正规列的存在性后，现在回到非正规算

子的延拓问题。

定义7 给定任一算子$R(\varphi,\cdots,\psi)$。若对所有正规列$\{f_j\}$，$\cdots$，$\{g_j\}$，列$\{R(f_\nu,\cdots,g_\nu)\}$为基础列，则称$R$对分布$f,\cdots,g$为**可行的**，并记

$$R(f,\cdots,g)=[R(f_\nu,\cdots,g_\nu)].$$

由定义7可看出，这里对正规算子的延拓与定义4一致，因正规列必为基础列。但定义7中的算子R不必是正规的。

至于究竟那些非正规算子对那些分布是可行的，则无一般的有效判定准则。近年来利用非标准分析中的函数列处理广函的乘积问题，似乎比正规列更为机动、灵活一些，但仍缺乏有效性，也未能给出重大的新结果。参看

Victoria Symp. on Nonstandard Analysis, Lecture Notes in Math., V. 369, 1974(Tharber, Katz, pp. 272—302).

在具体场合，正规列方法可给出有用的结果，如下例所示(J. Mikusinski, Bull. Acad. Polon., Ser. Math. Astr. Phys. 24(1966)511—513).

例3 奠定量子力学中用到的公式

$$\delta^2-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{-1}{\pi^2}\frac{1}{x^2}. \tag{14}$$

把(14)左边作为一个整体；单独的项δ^2及$\left(\frac{1}{x}\right)^2$缺乏定义

取δ分布的正规列$\{\delta_\nu\}$，用

$$\delta_\nu^2-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{x}*\delta_\nu\right)^2$$

的弱极限定义(14)的左边。改写上式为

$$\left(\delta_\nu+\frac{1}{\pi i}\frac{1}{x}*\delta_\nu\right)^2-\frac{2}{\pi i}\delta_\nu\left(\frac{1}{x}*\delta_\nu\right).$$

现在证第一项弱收敛于$\frac{-1}{\pi i}\delta'-\frac{1}{\pi^2x^2}$，而第二项弱收敛于$\frac{-1}{\pi i}\delta'$，则两项的差即给出$\frac{-1}{\pi^2x^2}$.

$A_\nu\equiv\delta_\nu+\frac{1}{\pi i}\frac{1}{x}*\delta_\nu$ 的F变换是$\widehat{A}_\nu=\widehat{\delta_\nu}+(2H-1)\widehat{\delta_\nu}=2H\widehat{\delta_\nu}$，这里$H(\xi)$为 Heaviside 函数。事实上，在主值意义下*)，

$$F\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{\varepsilon\to0+}\left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right\}\frac{e^{ix\xi}}{x}dx$$

$$=\lim\left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right\}\left(\frac{\cos\xi x}{x}+i\frac{\sin\xi x}{x}\right)dx,$$

由于$\frac{\cos\xi x}{x}$为x的奇函数而积分域为正、负对称的，故这一项的积分值为零，而得：

$$F\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{\varepsilon\to0+}\left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right\}\frac{-i\sin\xi x}{x}dx$$

$$=i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\xi x}{x}dx=\pi i\operatorname{sgn}\xi=\pi i(2H(\xi)-1).$$

$\widehat{\delta_\nu}$的具体表示不必算出，重要的是在弱收敛意义下有$\widehat{\delta_\nu}\to\widehat{\delta}=1$。于是$A_\nu^2$的$F$变换是$\widehat{A}_\nu*\widehat{A}_\nu$。当$\nu\to\infty$时，在弱拓扑下（在$S'$或$D'$中）有

$$\widehat{A}_\nu*\widehat{A}_\nu=(2H\delta_\nu)*(2H\delta_\nu)\to4H*H$$

---

*) 这里在F变换中换$e^{-ix\xi}$为$e^{ix\xi}$，更便于计算.

$$= 4\int_{-\infty}^{\infty} H(\xi-\eta)H(\eta)d\eta = 4\int_{0}^{\xi} H(\xi)d\eta = 4H(\xi)\xi,$$

故A_ν^2弱收敛于$\frac{1}{2\pi}F^{-1}[4H(\xi)\xi] = \frac{-1}{\pi i}\delta' - \frac{1}{\pi^2 x^2}$（见盖尔方特及希洛夫，广义函数，I，F 变换表，公式3，那里的$x_+ = H(x)x$，）由于这里是反变换且有因子4，所以须用$\frac{4}{2\pi}$乘那里的结果）。或直接核验如下（应用2.3.4（24）及(21)，换i为$-i$）：

$$F\left[\frac{-1}{\pi i}\delta'\right] = \frac{\xi}{\pi},$$

$$\frac{-1}{\pi^2}F\left[\frac{1}{x^2}\right] = \frac{1}{\pi^2}F\left[\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right] = -i\xi F\left[\frac{1}{x}\right]\frac{1}{\pi^2}$$

$$= \frac{-i\xi}{\pi^2}\pi i\,\mathrm{sgn}\,\xi = \frac{|\xi|}{\pi};$$

$$F\left[\frac{-1}{\pi i}\delta' - \frac{1}{\pi^2 x^2}\right] = \frac{\xi}{\pi} + \frac{|\xi|}{\pi} = \frac{2}{\pi}H(\xi)\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}[4H(\xi)\xi].$$

故(14)的第一项弱收敛于$\frac{-1}{\pi i}\delta' - \frac{1}{\pi^2 x^2}$。现在证明$u_\nu = \delta_\nu\left(\frac{1}{x}*\delta_\nu\right)$弱收敛于$\frac{-1}{2}\delta'$。在主值下理解积分

$$I_\nu = \int u_\nu(x)dx = \iint \frac{\delta_\nu(x)\delta_\nu(y)}{x-y}dxdy;$$

$$K_\nu = \int xu_\nu(x)dx = \iint \frac{x\delta_\nu(x)\delta_\nu(y)}{x-y}dxdy.$$

因I_ν的被积函数当互换x及y时变号，故$I_\nu=0$。为了算出K_ν，改写

$$K_\nu=1-\iint\frac{y\delta_\nu(x)\delta_\nu(y)}{x-y}dxdy,$$

互换x及y得$K_\nu=1-K_\nu$，由此知$K_\nu=\frac{1}{2}$。记

$$\begin{aligned}F_\nu(x)&=\int_{-\infty}^{x}(x-y)u_\nu(y)dy\\&=x\int_{-\infty}^{x}u_\nu(y)dy-\int_{-\infty}^{x}yu_\nu(y)dy,\end{aligned}$$

因$I_\nu=0$，$K_\nu=\frac{1}{2}$，故当$\nu\to\infty$时，有

$$F_\nu(x)\to\frac{-1}{2}H(x)=\begin{cases}\frac{-1}{2}, & x>0;\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

但$u_\nu=F_\nu''$，故u_ν弱收敛于$\frac{-1}{2}H''(x)=\frac{-1}{2}\delta'$。随之（14）成立。注意公式$\delta\cdot\frac{1}{x}=\frac{-1}{2}\delta'$在2.4.3例2中已有讨论。

注3 结合（14）及例2，可得量子力学中的如下有用公式：

$$\begin{cases}(\delta)^2-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{-1}{\pi^2}\frac{1}{x^2};\\ \delta\cdot\frac{1}{x}=\frac{-1}{2}\delta';\\ (\delta_+)^2=\frac{-1}{4\pi i}\delta'-\frac{1}{4\pi x^2}, \quad \delta_+\equiv\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2\pi ix};\\ (\delta_-)^2=\frac{1}{4\pi i}\delta'-\frac{1}{4\pi x^2}, \quad \delta_-\equiv\frac{\delta}{2}-\frac{1}{2\pi ix}.\end{cases} \tag{15}$$

后两个公式容易由前两个已奠定的公式推出。$\delta_{\pm}$在量子力学中称为**Heisenberg**分布。

注4 在量子场论中还用到 Dirac 分布的分数幂，见前引 Thurber 及 Katz 的文章。编者结合正规化方法及复阶积分，给出δ的复幂（包括分数幂），并较简捷地证得公式(15)。见数学研究与评论，1(1981)119—123.

注5 附带提到编者对广函的一种形式定义途径，并由此引出广函的两种乘积（见兰州大学学报，2(1962)1-5。这里在形式上略有改动）。

根据2.2.3中关于F空间上广函f的结构定理，或一般地由有限阶广函f的定义，知f如下作用于检试函数$\varphi\in\Phi$:

$$(f,\varphi)=\sum_{|\alpha|=0}^{m}\int F_{\alpha}(x)\partial^{\alpha}\varphi(x)dx\quad\forall\varphi\in\Phi.\tag{16}$$

其中$F_{\alpha}(x)$都是局部L可积函数，而要求F_{α}当$|\alpha|>0$时无局部L可积的偏导数。

用$F_{\alpha}^{|\alpha|}(x)$记当指标组$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$具给定长度$|\alpha|$而依确定顺序作所有可能组合的函数组$\{F_{\alpha}(x)\}$，且指标的排列顺序对给定的$|\alpha|$是统一的。于是称由局部$L$可积函数组$\{F_{\alpha}(x)\}$作成的函阵

$$f=\{F_{\alpha}^{|\alpha|}(x)\}_m=\begin{Bmatrix}F_0^0(x) & & \\ F_1^1(x), & F_2^1(x),\cdots, & F_{n_1}^1(x)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ F_1^m(x), & F_2^m(x),\cdots, & F_{n_m}^m(x)\end{Bmatrix}$$

$$n_m=\binom{n+m-1}{m},\quad m<\infty$$

为n阶广函，并按(16)作用于检试函数$\varphi(x)\in\Phi(R^n)$。

函阵的代数运算如下定义：

线性运算 $af+bg\equiv\{aF_{\alpha}^{|\alpha|}+bG_{\alpha}^{|\alpha|}\}$; (17)

点积运算 $f\cdot g\equiv\left\{\sum_{|\nu|=0}^{|\alpha|}F_{\nu}^{|\nu|}G_{\alpha-\nu}^{|\alpha-\nu|}\right\}$,

$|\alpha|\leqslant\max(m_1,m_2)$; (18)

叉积运算 $f\times g\equiv\{F_{\alpha}^{|\alpha|}\{G_{\beta}^{|\beta|}\}\}\equiv\{H_{\tau}^{|\tau|}\}$,

$r\leqslant m_1+m_2$. (19)

其中$F_{\alpha}^{|\alpha|}$，$G_{\alpha}^{|\alpha|}$分别是f,g的分量，m，m_2是相应的阶。(19)由Kronecker乘积构成，即用函阵$\{G_{\beta}^{|\beta|}\}$乘每个元$F_{\alpha}^{|\alpha|}(x)$，然后整理、合并同指标组的乘积元，例如：

$$\begin{Bmatrix}F_0^0 & \\ F_{(1,0)}^1, & F_{(0,1)}^1\end{Bmatrix}\times\begin{Bmatrix}G_0^0 & \\ G_{(1,0)}^1, & G_{(0,1)}^1\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}F_0^0G_0^0 & \\ F_0^0G_{(1,0)}^1+G_0^0F_{(1,0)}^1, & F_0^0G_{(0,1)}^1+G_0^0F_{(0,1)}^1, \\ F_{(1,0)}^1G_{(1,0)}^1, & F_{(1,0)}^1G_{(0,1)}^1+F_{(0,1)}^1G_{(1,0)}^1, \\ & F_{(0,1)}^1G_{(0,1)}^1\end{Bmatrix},$$

这两个函阵的点积则是：

$$\begin{Bmatrix}F_0^0 & \\ F_{(1,0)}^1, & F_{(0,1)}^1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}G_0^0 & \\ G_{(1,0)}^1, & G_{(0,1)}^1\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}F_0^0G_0^0 & \\ F_0^0G_{(1,0)}^1+G_0^0F_{(1,0)}^1, & F_0^0G_{(0,1)}^1+G_0^0F_{(0,1)}^1\end{Bmatrix}.$$

两种乘积对连续函数归为通常乘积，并有单元1，但x无逆元，因$\frac{1}{x}$不是局部可积的；若取$x^{-1}=[x(\ln|x|-1)]''$，则x^{-1}为二阶广函，在上述两种乘法运算下，都不是x的逆元。

还可注意，两种乘法都是交换的及结合的。

下面是几个简单例子（H为Heaviside函数）：

$$\delta\cdot\delta=\begin{Bmatrix}0\\-H\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}0\\-H\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}=0;$$

$$\delta\times\delta=\begin{Bmatrix}0\\-H\end{Bmatrix}\times\begin{Bmatrix}0\\-H\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\H\end{Bmatrix}=\delta';$$

$$\delta\cdot\delta'=\begin{Bmatrix}0\\-H\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}0\\0\\H\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}=0.$$

注6 近年来出现用代数拓张等处理广函乘积的方法，有较大概括性。例如见

E. E. Rosinger, *Distributions and Nonlinear Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

В. К. Иванов, ДАН, 237(1977) 779—781; Изв. Выс. Уч. Зав. Mar. 10(1977)65—69.

D. Baumgarten, Mitt. Math. Sem. Giessen Heft 123 (1977)161—173.

R. A. Struble, Studia Math. 37(1971) 103—109.

J. F. Colombeau, *New Generalized Functions and Multiplication of Distributions*, North-Holland, Elsevier, 1984.

2.5 广函的除法

广函的除法问题与多种方程的求解问题有关。相对地说，以解析函数除广函的讨论比较成熟，一般情形则甚少考虑。

2.5.1 一维情形

许多重要方程(不限于一维情形)都属于卷积方程的范围：给定$f\in\mathscr{E}'$，$g\in D'$，求$u\in D'$，使

$$f*u=g. \tag{1}$$

例如当$f=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha\delta^{(\alpha)}$时，(1)归为常系数线性微分方程

$$f*u=\sum a_\alpha\partial^\alpha u=g(x),$$

而当$f=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha\delta(x-x_\alpha)$时，得常系数差分方程

$$f*u=\sum a_\alpha u(x-x_\alpha)=g(x),$$

当$f=K(x)$时，则得第一类积分方程

$$f*u=\int K(x-y)u(y)dy=g(x).$$

显然，f可为上述三种广函的线性组合，于是相应可得更复杂的方程。

在(1)中限定$f\in\mathscr{E}'$,在于保证广函卷积的存在性。显然，这个要求仅属充分，而非必要的。

根据2.3.4定理20及21，知对(1)可作F变换，而得

$$\hat{f}\cdot\hat{u}=\hat{g}, \tag{2}$$

且$\hat{f}$为对固定的$\eta=\mathrm{Im}\zeta$关于$\xi=\mathrm{Re}\zeta$具幂增率的一阶整函数；$\hat{u}$及$\hat{g}$则为$Z=\hat{D}$上广函。故求解代数方程(2)归为广函与整函数的除法问题。

本段先考虑一维情形*)。

---

*) 参看L. Schwartz, Theorie des Distributions, Tom 1, 1950, chap. 5, §4及§5.

对给定的广函S，当$H(x)\in\mathscr{E}$且无零点时，除法问题是显然可解的：存在唯一的广函$T=\frac{S}{H}$，使

$$HT=S.$$

因此，问题出现于H有零点的情形。下面分成几个步骤进行考虑。

1) 以x相除。对给定广函S，存在无限多广函T，满足方程

$$xT=S.$$

显然，在点$x=0$外，T如下唯一确定：$T=\frac{S}{x}$.为使除法问题一般可解，在分布情形，当且仅当对所有具形$\varphi=x\psi\in D$的检试函数有$T(\varphi)=S(\psi)$。记D中可用x除尽的函数φ作成的子空间为E。由关系式$xT=S$知T在E上有定义。为了在D中确定T，只须知道T对D中不属E的某元φ_0的作用值$T(\varphi_0)$。特别取φ_0使$\varphi_0(0)=1$，则对任一个$\widetilde{\varphi}\in D$，有唯一的分解：

$$\widetilde{\varphi}=\lambda\varphi_0+\varphi,\quad \varphi\in E.$$

易知$\lambda=\widetilde{\varphi}(0)$。注意对$E$中元$\varphi$有

$$\varphi=\widetilde{\varphi}-\lambda\varphi_0=x\psi,\quad \psi\in D.$$

于是应有

$$T(\widetilde{\varphi})=\lambda T(\varphi_0)+S(\psi),\tag{3}$$

故$T(\varphi_0)$应先给定。反之，设φ_0已选定且$T(\varphi_0)$取给定的值，则(3)定义T为D上连续线性泛函，且为广函除法问题的解。事实上，当$\widetilde{\varphi}$在D中趋于零时，λ也趋于零，故$\lambda T(\varphi_0)$亦然。剩

下只须证明这时也有 $S(\psi)\to 0$ 或 $\psi\to 0$。为此可证明：当 $\varphi=\widetilde{\varphi}-\lambda\varphi_0\to 0$（在$E$中）时，有$\psi=\dfrac{\varphi}{x}\to 0$（在$D$中）。今

$$\psi^{(m)}=\left(\frac{\varphi}{x}\right)^{(m)}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^{m-k}\varphi^{(k)}$$

$$=\sum\binom{m}{k}\frac{(-1)^{m-k}(m-k)!}{x^{m-k+1}}\varphi^{(k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^{m-k}(m-k)!}{x^{m-k+1}}\left\{\sum_{\nu=0}^{m-k}\frac{x^{\nu}}{\nu!}\varphi^{(k+\nu)}(0)\right.$$

$$\left.+\frac{x^{m-k+1}}{(m-k+1)!}\varphi^{(m+1)}(\theta_k x)\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^{m-k}\varphi^{(m+1)}(\theta_k x)}{m-k+1}$$

$$+\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^{m}\varphi^{(j)}(0)}{x^{m-j+1}}\cdot\frac{m!}{j!}\sum_{k=0}^{j}\frac{(-1)^{k}j!}{k!(j-k)!}.$$

其中$\theta_k\in(0,1)$。由于$\varphi^{(0)}(0)=0$ 且当$j>0$时有

$$\sum_{k=0}^{j}\frac{(-1)^{k}j!}{k!(j-k)!}=(1-1)^{j}=0,$$

故上式简化为

$$\psi^{(m)}=\left(\frac{\varphi}{x}\right)^{(m)}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^{m-k}}{m-k+1}\varphi^{(m+1)}(\theta_k x),$$

由此得

$$|\psi^{(m)}(x)|\leqslant A_k\max_{|t|\leqslant|x|}|\varphi^{(m+1)}(t)|.$$

这就能保证：当$\varphi\to 0$（在E中），有$\psi\to 0$（在D中）。因此，当

$\widetilde{\varphi}\to 0$（在D中)时，有$T(\widetilde{\varphi})\to 0$。故(3)确定$T$为$D$上的连续线性泛函；且特别当$\widetilde{\varphi}\in E$时，有

$$T(\widetilde{\varphi})=T(x\psi)=(xT,\psi)=(S,\psi),$$

既然ψ为D中任一元，知T确满足方程$xT=S$。

最后，注意$xT=S$的两个不同的解T_1及T_2对应于$T(\varphi_0)$的两个不同的值，故

$$(T_1-T_2,\widetilde{\varphi})=(T,\widetilde{\varphi})-(T_2,\widetilde{\varphi})$$

$$=\lambda[T_1(\varphi_0)-T_2(\varphi_0)]=c\lambda=c\widetilde{\varphi}(0).$$

由此知$T_1-T_2=c\delta(x)$，这里$c=T_1(\varphi_0)-T_2(\varphi_0)$.

注1 对不同的$\varphi^{(j)}$，$j=1,2$，解T_1及T_2仍仅相差$c\delta(x)$.事实上，任一个$\widetilde{\varphi}\in D$有两种分解

$$\widetilde{\varphi}=\lambda\varphi_0^{(1)}+\varphi_1=\lambda\varphi_0^{(2)}+\varphi_2,\quad \varphi_1,\varphi_2\in E.$$

仍有$\lambda=\widetilde{\varphi}(0)$。于是

$$(T_1-T_2,\widetilde{\varphi})=\lambda[T_1(\varphi_0^{(1)})-T_2(\varphi_0^{(2)})]$$
$$+S(\psi_2-\psi_1).$$

其中$\psi_j=\dfrac{\varphi_j}{x}$，$j=1,2$。但$\psi_2-\psi_1=\lambda(\psi_0^{(2)}-\psi_0^{(1)})$，$\psi_0^{(j)}=\dfrac{\varphi_0^{(j)}}{x}$，$j=1,2$。故

$$(T_1-T_2,\widetilde{\varphi})=c\lambda=c\widetilde{\varphi}(0)=(c\delta,\widetilde{\varphi}).$$

这里$c=T_1(\varphi_0^{(1)})-T_2(\varphi_0^{(2)})+S(\psi_0^{(2)}-\psi_0^{(1)})$。由此仍得$T_1-T_2=c\delta$.

2) 以x^m相除。对给定广函S，存在无限个广函T，满足

方程

$$x^m T = S,$$

且任何两个解T_1及T_2之差为

$$T_1 - T_2 = \sum_{j=0}^{m-1} a_j \delta^{(j)}(x),$$

a_j都是常数。

事实上，可逐次以x除S，共除m次。由此知解T确存在。至于T在点$x=0$的不定性，则可如下证明。差$T=T_1-T_2$满足齐次方程$x^m T=0$，故T以点$x=0$为台。据2.3.2定理11知应有

$$T = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j c_j \delta^{(j)}(x),$$

但由2.4.2(6′)可算出

$$x^m T = \sum_{j=m}^{k} (-1)^{j-m} \frac{j!}{(j-m)!} c_j \delta^{(j-m)}(x) = 0,$$

故应有$c_j=0$（$j \geqslant m$）。由此即得$T_1 - T_2 = \sum_{j=0}^{m-1} a_j \delta^{(j)}(x)$.

3）　以仅具有限重孤立零点的无穷可微函数$H(x)$相除。显然，在不是H的零点的所有点近旁，除法问题是唯一可解的；而在H的m_j重孤立零点$x=a_j$近旁，改写$\frac{1}{H}$如下

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{(x-a_j)^{m_j}} \cdot \frac{(x-a_j)^{m_j}}{H},$$

因$\frac{(x-a_j)^{m_j}}{H}$在点a_j近旁无穷可微，故问题归为以$(x-a_j)^{m_j}$

相除。根据上面所论，除法问题总是可解的，且在点a_j近旁，任何二解T_1及T_2之差具形

$$T_1-T_2=\sum_{j=1}^{k}\left\{\sum_{\nu=0}^{m_j-1}c_{j\nu}\delta^{(\nu)}(x-aj)\right\},$$

k为零点的个数。

容易知道，以具无限重零点的无穷可微函数除任意广函，一般是无解的。

下面对多维情形作某些一般性的考察。

1） 在$D'(R^n)$中以x_j相除总是可能的。为证明这一点，只须重复一维情形的讨论。

2） 若以某$H\in\mathscr{E}$相除时为局部可行的，则必全局可行。事实上，取R^n的局部有限开覆盖列$\{\Omega_j\}$，使在每个Ω_j中可用H除$S\in D'$，则由分布的全局结构(2.3.2定理9)知$S=\sum_j S_j$，且$\text{supp}\,S_j\subset\Omega_j$。据假定，存在$T_j$使$HT_j=S_j$。总可认为$\text{supp}T_j\subset\Omega_j$，不然用在$\text{supp}S_j$某邻域中为1的函数$\alpha(x)\in D(\Omega_j)$乘$T_j$即可。于是方程$HT=S$的全局解为$T=\sum_j T_j$，且这个级数实际上是局部有限项的。

3） 设$\mathscr{E}$中函数$H(x)$的零点集$N^{n-1}=\{H(x)=0\}$为$n-1$维无奇点曲面，即H的所有一阶导数在N^{n-1}上不同时为零。简称这类函数为**正规函数**。显然，在N^{n-1}外各点近旁，以H相除在D'中总是可行且解为唯一的。在N^{n-1}上每点的近旁，经独立变量的代换，可把H变为x_n，故除法仍然可能。于是以H相除为局部可行。根据上述，以H相除亦为全局可行的(显然，正规性要求仅属充分，远非必要)。

4） 若以$\mathscr{E}$中二函数H和K相除为分别可行的，则以积HK相除必为可行的。事实上，可用H，K逐次相除。一般，若$P,\cdots,Q$为$\mathscr{E}$中分别可除除式，而$l,\cdots,m$为有限正整数，则以积$P^l\cdots Q^m$相除总是可能的。

2.5.2 以多项式相除

线性常系数偏微分方程的求解问题，在F变换下，等价于广函以多元多项式相除的问题。

尽管上段对多维情形的除法问题得到一些颇具概括性的结论，但并不能解决多项式相除的问题，因为对椭圆多项式$x_1^2+\cdots+x_n^2$这样简单而且性质很好的函数，并不能得出除法可行性的判断。这个多项式既不是正规函数，也不是正规函数的幂之积。

五十年代初已证明：广函以多项式相除总是可行的，或常系数线性偏微分方程总是局部可解的。下面介绍 Ehrenpreis 的讨论。参看Amer. J. Math. 76(1954)883—903.

引理1 设在复平面上给定m个点$z_1,\cdots,z_m$，则以任一点a为心作半径$\leqslant 1$的圆周L，对任一点$z\in L$，有$\min|z-z_j|\geqslant\dfrac{1}{2(m+1)}$.

证 不失一般性，可认为a是原点。设$z_1,\cdots,z_r$位于单位圆或圆周上，$z_{r+1},\cdots,z_m$位于单位圆外。在单位间隔I上最多有$r+2$个点：0，$|z_1|$，$\cdots$，$|z_r|$，1，而分I最多为$r+1$个子间隔、这些子间隔之一至少具长度$\dfrac{1}{r+1}$。设这个子间隔的中点为b。取L为以原点为心而以b为半径的圆周，则对任一点$z\in L$，任一个$j=1,\cdots,m$，有

$$|z-z_j|\geqslant||z|-|z_j||=|b-|z_j||$$
$$\geqslant\frac{1}{2(r+1)}\geqslant\frac{1}{2(m+1)}.$$

引理2 设Q为单元的m次多项式：
$$Q(x)=Q_0x^m+Q_1x^{m-1}+\cdots+Q_m,$$
则存在仅与m相关的常数$\alpha\neq0$，使对以任一复点 a 为心而半径$\leqslant1$的圆周M，有
$$|Q(x)|\geqslant\alpha|Q_0|,\quad\forall x\in M.$$

证 总可认为$Q_0\neq0$。设$x_1,\cdots,x_m$为Q的零点，则有
$$Q(x)=Q_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m).$$
据引理1，可作以a为心且半径$\leqslant1$的圆周M，使对所有$x\in M$及$1\leqslant j\leqslant m$有$|x-x_j|\geqslant\frac{1}{2(m+1)}$。故对所有的$x\in M$，有

$|Q(x)|\geqslant\frac{|Q_0|}{\alpha^m(m+1)^m}$。取$\alpha=2^{-m}(m+1)^{-m}$，即得引理。

引理3 设Q为n元多项式，不为常数。对$r>1$，记$C_r=\{z:\ z\in\mathbf{C}^n,\ |\mathrm{Im}z_j|\leqslant r,\ j=1,\cdots,n\}$。设$F(z)\in Z=\widehat{D}$并满足
$$\sup_{z\in C_r}|Q(z)F(z)|\leqslant a$$

对某$x_p(1\leqslant p\leqslant n)$，记$Q=Q_0x_p^m+\cdots+Q_m,Q_j\ (j=0,1,\cdots,m)$是$x_1,\cdots,x_{p-1},x_{p+1},\cdots,x_m$的多项式。则存在$\beta>0$，使
$$\sup_{z\in C_{r-1}}|Q_0(z)F(z)|\leqslant a\beta$$

证 不失一般性，可认为$p=1$。设$z_1,\cdots,z_n$为复数，使$|\mathrm{Im}z_j|\leqslant r-1$，$j=1,\cdots,n$。据引理2，存在数$\alpha>0$及以$z_1$为心而半径$\leqslant1$的圆周$M$，使对所有$z\in M$，有

$$|Q(z,z_2,\cdots,z_n)|\geqslant\alpha|Q_0(z_2,\cdots,z_n)|,$$

于是对所有的$z\in M$得(注意$(z,z_2,\cdots,z_n)\in C_r$)：

$$\alpha|Q_0(z_2,\cdots,z_n)F(z,z_2,\cdots,z_n)|$$
$$\leqslant|Q(z,z_2,\cdots,z_n)F(z,z_2,\cdots,z_n)|\leqslant a.$$

取 $\beta=\frac{1}{2}$，有

$$|Q_0(z_2,\cdots,z_n)F(z,z_2,\cdots,z_n)|\leqslant a\beta\quad\forall z\in M;$$

若$Q_0(z_2,\cdots,z_n)=0$，显然有

$$|Q_0(z_2,\cdots,z_n)F(z_1,z_2,\cdots,z_n)|\leqslant a\beta;$$

若$Q_0(z_2,\cdots,z_n)\neq 0$，则对所有的$z\in M$，

$$|F(z,z_2,\cdots,z_n)|\leqslant a\beta/|Q_0(z_2,\cdots,z_n)|;$$

因F为z_1的整函数，据极大模定理有

$$|F(z_1,z_2,\cdots,z_n)|\leqslant a\beta/|Q_0(z_2,\cdots,z_n)|,$$

故在任何情况，总得到$|Q_0(z_2,\cdots,z_n)F(z_1,\cdots,z_n)|\leqslant a\beta$。由于$(z_1,\cdots,z_n)$是$C_{r-1}$中任一点，故引理一般成立。

定理1 设Q为n元多项式，不为零；$\{F_j\}\subset Z$，若在Z中有$QF_j\to 0$ $(j\to\infty)$，则在Z中有$F_j\to 0$.

证 对Q中变元的个数k应用归纳法。当$k=0$时，Q为不等于零的常数，定理显然成立。设定理当某个$k>0$对含$k-1$个元的所有多项式成立。不失一般性，可认为$x_1,\cdots,x_k$都出现于Q中，并记

$$Q(x_1,\cdots,x_k)=Q_0(x_2,\cdots,x_k)x_1^m+\cdots$$
$$+Q_m(x_2,\cdots,x_k),\quad Q_0\neq 0,$$

据2.1.3定理13，列$\{QF_j\}$应含于某个$Z(a)=\widehat{D}(a)$，且在其中$QF_j\to 0$。因多项式Q不影响F_j的阶及型，故$\{F_j\}\subset Z(a)$.于是对任意的$r>0$及n元多项式P，在C_r上一致有$PQF_j\to 0$。引理3表明列$\{Q_0F_j\}$也有这种性质，即：对任何$r>0$及n元

多项式P，在C_r上一致有$Q_0PF_j\to 0$，即在$Z(a)$中有$Q_0F_j\to 0$。但Q_0为$k-1$元多项式，据归纳法假定，在$Z(a)$中随之在Z中有$F_j\to 0$.

推论1 设$P(D)$为常系数线性偏微分算子，$\{f_j\}\subset D$且在D中$Pf_j\to 0$，则在D中$F_j\to 0$。

对任意的$k>0$，$s\geqslant 0$，记$D_k^s(R^n)=\{\varphi(x)$：$\varphi\in C_0^s$，$\text{supp}\varphi\subset R_k\}$，这里$R_k=\{x$：$|x_j|\leqslant k$，$j=1,\cdots,n\}$。用半范列$\{p_j(f)=\max\limits_{x\in R^n}|\partial^j f(x)|\}$定义$D_k^s$中拓扑。记$D^s=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}D_k^s$，其对偶空间$D'^s$是$s$阶分布空间；$D'_F=\bigcup\limits_{s=1}^{\infty}D'^s$是所有有限阶分布的空间。

设$P(D)$为m阶常系数偏微分算子。用PD_k^{s+m}记具形$Pf(f\in D_k^{s+m})$的函数的集，它是D_k^s的子空间，可赋以D_k^s中拓扑的导拓扑。

定理2 对任何$S\in D'_F$，存在$T\in D'_F$使$P^*(D)T=S$，这里$P^*=\overline{P}(D)$为P的伴算子，$\overline{P}$表示对系数取复共轭值。特别，P^*在D'_F中有基本解F：$P^*F=\delta$。

证 设S为s阶分布。类似于定理1证明中的讨论，知$P\varphi\to\varphi$为PD^{s+m+3}到D^s的连续线性映射。故$(T,P\varphi)\to(S,\varphi)$为$PD^{s+m+3}$上的连续线性泛函。记

$$K=\{\varphi\text{：}\ \varphi(x)\in PD^{s+m+4},\ \max_{x\in R^n}|\partial^\alpha\varphi(x)|\leqslant 1,\ |\alpha|\leqslant s+4\},$$

则对每个整数j，$K_j=K\cap D_j^{s+3}$是PD_j^{s+m+3}中的紧集（据Ascoli-Arzela定理）；并记$U_j=\{\varphi$：$\varphi\in K_j$，$|(T,\varphi)|<1\}$，$\bigcup\limits_j U_j$的凸闭包为V。据2.1.1中讨论，V是PD^{s+m+4}中一个零

元邻域。此外，对$\varphi\in V$，有$|(T,\varphi)|\leqslant 1$。故T为PD^{s+m+1}上的连续线性泛函，而可延拓为空间D^{s+1}上的连续线性泛函，仍记为T。对任一个$\varphi\in D$，有

$$(P*T,\varphi)=(T,P\varphi)=(S,\varphi).$$

故在弱意义下有$P*T=S$；特别取$S=\delta$，存在F使$P*F=\delta$。

推论2 任何多项式在广函空间$\widehat{D'_F}$上是可除的，这里$\widehat{D'_F}$是D'_F的F变换空间。

注2 关于以多项式除广函的问题，在多种广函空间都得出肯定结果。例如

B. Malgrange (C.R.Paris, 237:25(1953)1620—1622; Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 6(1955/56)271—354; Sem. Schwartz, 4(1959/60)21—25) 建立了如下的一些关系：

$$PD'_F=D'_F;\quad P\mathscr{E}=\mathscr{E};$$

$$PC^r\supset C^p\ (p\geqslant m,\ r=p-d,\ d>0\text{为任意的}).$$

L. Ehrenpreis (Amer. J. Math., 76(1954) 883—903; 77(1955)286—292; 78(1956)685—715; 82(1960) 522—588; 84(1962)324—348) 除上述前两个关系外，还得到如下结果：

$$PH=H;\quad PH_a=H_a;\quad P\mathscr{O}=\mathscr{O}.$$

这里H为整函数空间；$H_a(a>1)$为阶$\leqslant a$的整函数空间；$\mathscr{O}$为形式幂级数空间。

L. Hörmander (Ark. főr Mat., 3(1958)555—568)给出关系

$$PS'=S'.$$

.5.3 以整函数相除*)

考虑一般的卷积方程

---

*) 本段取材于L. Hörmander, Ann. Math. 76(1962)148—170.

$$S*u=f,\quad S,f\in\mathscr{E}';\tag{4}$$

相应的除法问题是

$$\hat{S}\hat{u}=\hat{f}.\tag{5}$$

先作一些预备性讨论。记

$$\|\varphi\|_j\equiv\sup_K\sum_{|\alpha|\leqslant j}|\partial^\alpha\varphi(x)|,\quad \varphi\in C_0^\infty(K).$$

引理4 若对某含内点的紧集K有

$$\|\varphi\|_0\leqslant C\|S*\varphi\|_N,\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(K),\tag{6}$$

则存在常数A_1,A_2,A_3，使对每一点$\xi\in R_n$，有点$\eta\in R^n$，使

$$|\xi-\eta|\leqslant A_1\ln(2+|\xi|),\quad |\hat{S}(\eta)|\geqslant(A_2+|\xi|)^{-A_3}.\tag{7}$$

证 不失一般性，可认为K是点$x=0$的闭凸邻域。取某固定函数$\psi(x)\in C_0^\infty(K)$，使

$$\psi\geqslant0,\quad \int\psi dx=1,$$

并用F变换关系

$$\hat{\psi}_k(\xi)=\left[\hat{\psi}\left(\frac{\xi}{k}\right)\right]^k,\quad k=1,2,\cdots$$

定义列$\{\psi_k(x)\}$，即ψ_k为函数$k^n\psi(kx)$的k重卷积；且因$\operatorname{supp}\psi(kx)\subset\frac{K}{k}$，知$\operatorname{supp}\psi_k\subset K$。对每个$k$，有

$$|\hat{\psi}_k(\xi)|\leqslant1.$$

事实上，

$$|\hat{\psi}_1(\xi)|=\left|\int\psi(x)e^{-ix\xi}dx\right|\leqslant\int\psi(x)dx=1;$$

$$|\hat{\psi}_k(\xi)|=\left|\hat{\psi}\left(\frac{\xi}{k}\right)\right|^k\leqslant1.$$

由于$\widehat{\psi}(\xi)$当$|\xi|\to\infty$时趋于零且$|\widehat{\psi}(\xi)|<1$，$\xi\neq 0$，故存在常数$a>0$，使当$|\xi|\geqslant 1$时有$|\widehat{\psi}(\xi)|\leqslant e^{-a}$。于是

$$|\widehat{\psi}_k(\xi)|\leqslant e^{-ak},\quad |\xi|\geqslant k.$$

今证明：若取A_2充分大，取A_1及A_3使

$$A_1>\frac{\mu+N}{a},\quad A_3>N,$$

则(7)成立。上式中的μ为分布S的阶（注意$S\in\mathscr{E}'$为紧台分布）。设若不然而对如上选取的A_1及A_3，(7)对任何的A_2都不成立，则存在点列$\{\xi_j\}\subset R_n$，$\xi_j\to\infty$，使

当$|\eta-\xi_j|\leqslant A_1\ln(2+|\xi_j|)$时，有

$$|\widehat{S}(\eta)|\leqslant|\xi_j|^{-A_3},\tag{8}$$

取k为$A_1\ln(2+|\xi_j|)$的整数部分。记$\widehat{\varphi}_j(\xi)=\widehat{\psi}(\xi-\xi_j)$，有

$$\varphi_j\in C_0^\infty(K);\ \|\varphi_j\|_0^2\geqslant C\int|\varphi_j|^2dx=\frac{C}{(2\pi)^n}$$

$$\times\int\left|\widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{k}\right)\right|^{2k}d\xi\to\infty\quad(j,k\to\infty)$$

这里$C=\dfrac{1}{\text{mes}K}$，因K具内点，$\text{mes}K>0$。事实上，函数

$$\left[\widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{k}\right)\right]^k=\left[\widehat{\psi}(0)+\frac{\xi}{k}\widehat{\psi}'\left(\frac{\theta\xi}{k}\right)\right]^k=\left[1+\frac{\xi}{k}\widehat{\psi}'\left(\frac{\theta\xi}{k}\right)\right]^k$$

$$0<\theta_1,\cdots,\theta_n<1$$

当$k\to\infty$时趋于某指数函数，而非平方可积的。

另一方面，可证明(6)的右边当换φ为φ_j时随$j\to\infty$而趋于零。故得矛盾。为证明这一点，注意

$$\sup|\partial^\alpha\varphi| = \sup\left|\int\xi^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)e^{ix\xi}\frac{d\xi}{(2\pi)^n}\right|,$$

故只须证明

$$\int(1+|\xi|)^N|\widehat{S}(\xi)\widehat{\varphi_j}(\xi)|d\xi\to 0 \quad (j\to\infty).$$

由于$|\widehat{\varphi_j}|\leqslant 1$且球$|\xi-\xi_j|\leqslant k$的测度具阶$O(k^n)$，故由(8)知上式右边沿球的积分的绝对值不超过

$$C(1+|\xi_j|+k)^N|\xi_j|^{-A_3}k^n$$

既然$A_3>N$，$k=O(\ln|\xi_j|)$，沿球$|\xi-\xi_j|\leqslant k$的积分值当$j\to\infty$时趋于零。为估计球外的积分，注意由2.3.4定理 20 式(25)当$\text{Im}s=0$时有

$$|\widehat{S}(\xi)|\leqslant C_1(1+|\xi|)^\mu.$$

应用初等不等式

$$1+|\xi|\leqslant(1+|\xi_j|)(1+|\xi-\xi_j|),$$

可得

$$\int_{|\xi-\xi_j|>k}(1+|\xi|)^N|\widehat{S}(\xi)\widehat{\varphi_j}(\xi)|d\xi$$

$$\leqslant C_1(1+|\xi_j|)^{\mu+N}\int|\widehat{\psi_k}(\xi)|(1+|\xi-\xi_j|)^{\mu+N}d\xi$$

$$\leqslant C_1 e^{-a(k-1)}(1+|\xi_j|)^{\mu+N}$$

$$\times\int(1+|\xi-\xi_j|)^{\mu+N}\left|\widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{k}\right)\right|d\xi,$$

经变量代换易知后一积分具阶 $O(k^{n+\mu-N})$；而由 k 的 选 择知 $(2+|\xi_j|)\leqslant e^{\frac{(k+1)}{A_1}}$，但因$\frac{\mu+N}{A_1}<a$，知上式右边当$k\to\infty$时趋于零。引理证毕。

定义1 若$\widehat{S}(\xi)$具性质(7)，即称$\widehat{S}$为缓降的，相应称S为可逆的。

这个定义及引理4属于Ehrenpreis．

引理5[*] 设$S\in\mathscr{E}'$为不可逆分布，则对R^n中每个具内点的紧集K，存在连续函数φ，$\operatorname{supp}\varphi\subset K$，使$S*\varphi\in C_0^\infty$，但$\varphi$不属于$C^1$。

证 若引理不真，使所述的φ必属C^1，则有

$$\|\varphi\|_1\leqslant C\{\|\varphi\|_0+\|S*\varphi\|_N\}, \tag{9}$$

选择φ_j如上，得

$$\|\varphi_j\|_0\leqslant\int\left|\widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{k}\right)\right|^k d\xi\leqslant\int\left|\widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{k}\right)\right|d\xi=Ck^n$$

故(9)右边当$\varphi=\varphi_j$时具阶$O(k^n)=o(|\xi_j|)$．

另一方面，由Parseval等式有

$$\left\{\int(1+|\xi|)^2|\widehat{\varphi_j}(\xi)|^2d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant C\|\varphi_j\|_1,$$

上式左边大于量

$$\left\{\int_{|\xi|<1}(1+|\xi+\xi_j|)^2\left|\widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{k}\right)\right|^{2k}d\xi\right\}^{\frac{1}{2}},$$

而由于$\int_{|\xi|<1}\left|\widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{k}\right)\right|^{2k}d\xi$当$k\to\infty$时的极限值不为零，这个量至少具阶$O(|\xi_j|)$。所得估计与(9)矛盾。故引理真。

引理6 设$S\in\mathscr{E}'$可逆，K为R^n中任一紧集，则存在常数C及N，使(6)成立。

证 先证明一个辅助的不等式。设$F(z)$，$G(z)$及$\dfrac{F(z)}{G(z)}$在

---

*) 这个引理与除法问题无关．这里提到它，为的是揭示可逆分布的性质．

$\mathbf{C}^n$的某球$|z|<R$中解析。若在此球中$|F|<A$，$|G|<B$，则

$$\left|\frac{F(z)}{G(z)}\right| \leqslant AB^{\frac{2|z|}{R-|z|}}|G(0)|^{-(R+|z|)/(R-|z|)},$$

$$|z|<R. \qquad (10)$$

不妨设$A=B=1$（不然换$F=AF_1$，$G=BG_1$，可达到目的），并在一维情形证明。于是

$$\left|\frac{F(z)}{G(z)}\right| \leqslant \frac{1}{|G(z)|}. \qquad (11)$$

对正调和函数$-\ln|G(z)|$应用Harnack不等式得

$$-\ln|G(z)| \leqslant -\frac{R+|z|}{R-|z|}\ln|G(0)|, \quad |z|<R,$$

或

$$\left|\frac{1}{G(z)}\right| \leqslant |G(0)|^{-(R+|z|)/(R-|z|)}, \quad |z|<R.$$

结合(11)即得(10)。由(10)可推知：若$F, G, \frac{F}{G}$都是整函数，则对每个$r>0$有

$$\left|\frac{F(z)}{G(z)}\right| \leqslant \sup_{|z-\zeta|<4r}|F(\zeta)| \sup_{|z-\zeta|<4r}|G(\zeta)| /$$

$$\left[\sup_{|z-\zeta|<r}|G(\zeta)|\right]^2. \qquad (12)$$

事实上，取$R=3r$并平移坐标原点于球$|z-\zeta|<r$中点ζ，再应用(10)，即得(12)。

现在证明引理。取$\varphi\in C_0^\infty(K)$；设N为某个非负整数。记$\psi=S*\varphi$，有$\widehat{\psi}(\zeta)=\widehat{S}(\zeta)\widehat{\varphi}(\zeta)$。对与$N$有关的某个常数$C$，有：

$$|\widehat{\psi}(\zeta)|\leqslant Ce^{R|\operatorname{Im}\zeta|}(1+|\zeta|)^{-N}\|\psi\|_N,$$

这里$R=\sup\limits_{\Omega}|x|$，$\Omega$为$\operatorname{supp}S$沿$K$平移所得点集。应用(12)而

取$r=A_1\ln(2+|\xi|)$，并注意据可逆性定义1，$\widehat{S}$具性质(7)，故对实的ξ有

$$|\widehat{\varphi}(\xi)|\leqslant\sup_{|\xi-z|<4r}|\widehat{\psi}(z)|\sup_{|\xi-z|<4r}|\widehat{S}(z)|(A_2+|\xi|)^{2A_3}.$$

另一方面，由2.3.4(25)知

$$|\widehat{S}(z)|\leqslant Ce^{H|\operatorname{Im}z|}(1+|z|)^B,$$

故得

$$|\widehat{\varphi}(\xi)|\leqslant C_1(1+|\xi|)^{k-N}\|\psi\|_N,\quad \xi\in R_n,\tag{13}$$

$$k=4(R+H)A_1+B+2A_3.$$

取$N>k+n$，由(13)及F变换反转公式知(6)成立：

$$\|\varphi\|_0=\frac{1}{2\pi}\sup\left|\int\widehat{\varphi}(\xi)e^{ix\xi}d\xi\right|$$

$$\leqslant\frac{C}{2\pi}\|\psi\|_N\int\frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{N-k}}\leqslant C_1\|\psi\|_N=C_1\|S*\varphi\|_N,$$

至此引理证明完毕。

定理3 在卷积方程(4)中，若$\dfrac{\widehat{f}}{\widehat{S}}$为整函数，且$\widehat{S}$缓降，则(4)有解$u\in\mathscr{E}'$；特别若$f\in C_0^\infty$，则$u\in C_0^\infty$.

证 和证明(13)一样，可得

$$\left|\frac{\widehat{f}}{\widehat{S}}\right|\leqslant c(1+|\zeta|)^Be^{H|\operatorname{Im}\zeta|}.$$

据2.3.4定理20，知$\dfrac{\hat{f}}{\hat{S}}$是某个$u\in\mathscr{E}'$的F变换；特别若$f\in C_0^\infty$，则(13)对任何N成立，于是u的各阶导数

$$|\partial^\alpha u(x)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\widehat{u}(\xi)(i\xi)^\alpha e^{ix\xi}d\xi\right|$$

$$\leqslant\frac{c_1}{2\pi}\|\psi\|_N\int\frac{|\xi|^\alpha}{(1+|\xi|)^{N-k}}d\xi$$

存在且具紧台(因$u\in\mathscr{E}'$)，故$u\in C_0^\infty$。

推论3[*] 具性质$S*u\in C_0^\infty$的分布$u\in\mathscr{E}'$实际使$u\in C_0^\infty$的充要条件是：$S\in\mathscr{E}'$且为可逆的。

这是引理 5 及定理 3 的显然结果。

引理7 对任意两个域$\Omega_1,\Omega_2\subset R^n$，若$S$的伴算子$S^*$具性质：$S^**D'(\Omega_2)\supset\mathscr{E}(\Omega_1)$，则由$D(\Omega_2)$到$D(\Omega_1)$的逆算子$S^{-1}$为序列连续的，即：由$\varphi_j\to 0$(在$D(\Omega_2)$中)，有$S^{-1}\varphi_j\to 0$(在$D(\Omega_1)$中)。

证 设K_2为Ω_2中某紧集，今证明：存在紧集$K_1\subset\Omega_1$，非负整数k，N及正数C，使

$$\left|\int f\varphi dx\right|\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_{K_1}|\partial^\alpha f|\,\|S*\varphi\|_N,$$

$$\forall f\in\mathscr{E}(\Omega_1),\quad \varphi\in D(\Omega_1).\qquad (14)$$

这里要求$\operatorname{supp}S*\varphi\subset K_2$。记这种$\varphi$的集为$\Phi$，并用范$\|S*\varphi\|_N$确定其中拓扑。显然，(14)的左边对$f$连续；而据假定，对固定的$f\in\mathscr{E}(\Omega_1)$，有$u\in D'(\Omega_2)$使$S^**u=f$，故$(f,\varphi)=(u,S*\varphi)$，而得对$\varphi$的连续性。既然$(f,\varphi)$分别对$f$及$\varphi$连续，据1.3.3定理11，知定义于$\mathscr{E}\times\Phi$上的双线性泛函$(f,\varphi)$为整体连

[*] 见引理 5 足注。

续的，故(14)成立，且Φ中元φ的台含于K_1。取$f\in S$，令

$$g=(1-\triangle)_j f,\quad 2j>k+n+1,\ \triangle=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

作F变换得

$$\hat{g}(\xi)=(1+|\xi|^2)^j\ \hat{f}(\xi),$$

故每个$g\in S$可表为$(1-\triangle)^j f$，且$f\in S$。用$\int|g|\,dx$估计$|\hat{g}(\xi)|$，用$\int\xi^\alpha\hat{f}(\xi)|d\xi$估计$|\partial^\alpha f|$，可得估计式

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup|\partial^\alpha f|\leqslant C\int|g|dx.$$

在(14)中换φ为$(1-\triangle)^j\varphi$得

$$\left|\int g\varphi dx\right|\leqslant C\int|g|dx\|S*\varphi\|_{N+2j},\quad\forall\varphi\in\Phi,\quad g\in S.$$

这里C为另一常数(下同)。记$N'=N+2j$，由上式知

$$\left.\begin{array}{l}\|\varphi\|_0\leqslant C\|S*\varphi\|_N,\\ \|\varphi\|_j\leqslant C\|S*\varphi\|_{N'+j},\end{array}\right.\quad\forall\varphi\in\Phi,\quad j=1,2,\cdots.$$

这些不等式及Φ中元φ的台含于K_1一道正表明S^{-1}在D上为序列连续的。

引理8 S^{-1}为序列连续算子的充要条件是：1) 对每个紧集$K_2\subset\Omega_2$，有紧集$K_1\subset\Omega_1$，使由$\varphi\in D(\Omega_1)$及$\mathrm{supp}S*\varphi\subset K_2$推出$\mathrm{supp}\varphi\subset K_1$；2) 对每个紧集$K_1\subset\Omega_1$，存在常数$C$及$N$，使

$$\|\varphi\|_0\leqslant C\|S*\varphi\|_N,\quad\forall\varphi\in D(K_1).\qquad(6)$$

证 若1)不成立，则有列$\{\varphi_j\}\subset D(\Omega_1)$，使$\mathrm{supp}S*\varphi_j$含于$K_2$，但所有$\mathrm{supp}\varphi_j$不同含于$\Omega_1$的任何紧子集内。取$a_j>0$

充分小，使$a_j S*\varphi_j$的j阶以上导数的绝对值$<\frac{1}{j}$，这时$S*a_j\varphi_j \to 0$而列$\{a_j\varphi_j\}$不在$D(\Omega_1)$中收敛（因$\mathrm{supp}\, a_j\varphi_j$不同属于固定紧集）。同样，若 2）不成立，可得类似的矛盾。必要性得证。

至于充分性，由引理 7 的证明知为显然的。

定义2 开集对(Ω_1,Ω_2)若满足条件

$$\Omega_1+\mathrm{supp}S\subset\Omega_2$$

及引理 8 条件1），即称为**S凸的**。

定理4 $S^* * \mathscr{E}(\Omega_2)=\mathscr{E}(\Omega_1)$的充要条件是：$S^{-1}$为序列连续的。

证 必要性是显然的，因由$S^* * \mathscr{E}(\Omega_2)=\mathscr{E}(\Omega_1)$知有$S^* * D'(\Omega_2)\supset\mathscr{E}(\Omega_1)$，而据引理7，即得$S^{-1}$的序列连续性。

反之，由S^{-1}的存在性及序列连续性，知对任何$f\in\mathscr{E}(\Omega_2)$及$\varphi\in\mathscr{E}(\Omega_1)$，由恒等式

$$(f,\varphi)=(S^{-1}f,\psi)$$

定义某个$\psi\in\mathscr{E}'(\Omega_2)$。今

$$(S*u,\psi)=(S^{-1}S*u,\varphi)=(u,\varphi),$$

故$\varphi=S^* * \psi$，由此知ψ实际属于$\mathscr{E}(\Omega_2)$。因φ为$\mathscr{E}(\Omega_1)$中任意元，故$S^* * \mathscr{E}(\Omega_2)=\mathscr{E}(\Omega_1)$。

推论4 定理4中的条件

$$S^* * \mathscr{E}(\Omega_2)=\mathscr{E}(\Omega_1) \tag{15}$$

可换为等价的条件

$$S^* * D'_F(\Omega_2)\supset\mathscr{E}(\Omega_1), \tag{16}$$

或

$$S^* * D'(\Omega_2)\supset\mathscr{E}(\Omega_1). \tag{17}$$

事实上，显然有(15)⇒(16)⇒(17)，而由定理 4 知(17)⇒S^{-1}的序列连续性，后者正是(15)成立的充分条件。

定理5 由$S^* * \mathscr{E}(\Omega_2) = \mathscr{E}(\Omega_1)$知卷积方程(4)在$\mathscr{E}'$中可解，随之除法问题(5)在$\widehat{\mathscr{E}'}$中可解。

证 由(4)知对任一个$\varphi \in \mathscr{E}(\Omega_2)$，等式

$$(f,\varphi) = (S*u,\varphi) = (u,S^* * \varphi)$$

定义$S^* * \mathscr{E}(\Omega_2)$上的一个广函$u$；既然$\mathscr{E}(\Omega_1) = S^* * \mathscr{E}(\Omega_2)$，故$u$为$\mathscr{E}(\Omega_1)$上广函，且$S*u = f$，即(4)可解。由于$F$变换为$\mathscr{E}'$及$\widehat{\mathscr{E}'}$间的拓扑同构，故(5)也可解。

注3 本段标题足注所引文章中，还讨论了其它空间的卷积方程的求解问题，并阐述了域Ω_1及Ω_2的凸性结构关系；这篇文章可作为以整函数相除的除法问题的总结。

关于以广函的除法问题，除2.5.2注1中所提到Malgrange及Ehrenpreis的工作外，可参看：

S.Lojaciewicz, Studia Math. 18(1959)87—136

В.П. Паламодов, ДАН, 14(1961) 1302—1305; Mat. Cб. 60(1963) 270—292; УМН, 18:2(1963)164—167.

E.E.Rosinger, Pacif. J.Math., 66(1976)257—263.

B.Gramsch, R.Wagner, Manuscripta Math.21(1977) 25—42.

M. F. Atiyah, Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970) 145—150.

2.6 流形上的分布

在本章最后，简单地介绍一下流形上的分布。

2.6.1 定义

先回忆一下所谓流形，指的是具无穷可微结构（等价的

C^∞图集类)的有限维(n维)、次紧、T_2拓扑空间M，其上C^∞图集$\mathscr{A}$是细图$\{(U_j,\varphi_j)\}$的集。由于次紧性，$\{U_j\}$可取为M的可列的、局部有限的开覆盖列。映射$\varphi_j:U_j\to\varphi_j(U_j)\subset R^n$是同胚映射，且迭合映射

$$\varphi_j\circ\varphi_k^{-1}:\varphi_k(U_j\cap U_k)\to\varphi_j(U_j\cap U_k):R^n\to R^n$$

为C^∞微分同胚(所谓的相容性要求)。

在定义流形上的分布之前，先提一下分布的变量代换。设$g:U\subset R^n\to V\subset R^n$为$C^\infty$微分同胚。通常函数$\varphi(x)$的变量代换定义为$g\varphi=\varphi\circ g^{-1}$；而分布$f$的变量代换则如下定义

$$(gf,\varphi)=(f,g^{-1}\varphi|\det g|)=(f,|\det g|\varphi\circ g). \qquad (1)$$

设$\mathscr{A}=\{(U_j,\varphi_j)\}$为$M$上图集。**$M$上的分布$f$由**$R^n$中如下的分布列$\{f_j\}$定义：$f_j\in D'(\varphi_j(U_j))$且微分同胚$\varphi_j\circ\varphi_k^{-1}$以如下方式作用于$f_k$：

$$f_j=(\varphi_j\circ\varphi_k^{-1})f_k \quad (\text{在}\varphi_j(U_k\cap U_j)\text{上}),$$

若$\mathscr{B}=\{(V_j,\psi_j)\}$为$M$上等价于$\mathscr{A}$的另一图集，且$R^n$中分布列$\{g_i\}$具性质

$$g_j=(\psi_j\circ\psi_i^{-1})f_i \quad (\text{在}\psi_j(V_i\cap V_j)\text{上}),$$

则称$\{g_j\}$与$\{f_j\}$定义同一分布$f\in D'(M)$。不难核验这个关系是一个等价关系。于是可理解**M上的分布空间$D'(M)$为R^n中分布列$\{f_j\}$的等价类的空间。**

类似地可定义向量丛$\pi:E\to M$**上的截口分布**。设典型纤维F为有限维实向量空间R^l。对M上图集$\mathscr{A}=\{(U_i,\varphi_i)\}$，由$(x,e_x)\to(\varphi_i(x),g_i(x)e_x)$确定的映射

$$\Phi_i:\ \pi^{-1}(U_i)\to\varphi_i(U_i)\times R^l$$

为C^∞微分同胚；这里e_x为$x\in M$处纤维上某元，$g_i(x)$为点x处纤维空间的某给定线性变换。

设$f_i=\{f_{i1},\cdots,f_{il}\}$为$R^n$中开集$\varphi_i(U_i)$内的通常分布

列，而使

$$f_j=(\varphi_j\circ\varphi_i^{-1})(g_j\circ g_i^{-1}\cdot f_i)\quad（在\varphi_j(U_i\cap U_j)上），$$

可看出$(g_j\circ g_i^{-1})f_i$是$\varphi_i(U_i\cap U_j)$上的一组l个通常分布，而f_j则是由它们经变换$\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}$得来的定义于$\varphi_j(U_i\cap U_j)$的一组$l$个通常分布。

向量丛π：$E\to M$的**截口分布**定义为上述具l个分量的列$\{f_j\}$的等价类。等价关系和标量分布一样引进。列$\{f_j\}$称为分布f在细图(U_i,φ_i)中的**分量列**。截口分布空间记作$D'(M,E)$.

例1 对流形M的切丛TM，其上截口分布v在细图(U,φ)中有n个标量分布$v_1,\cdots,v_n$作为其分量。v关于另一细图(U',φ')的分量$v_1',\cdots,v_n'$与分量$v_1,\cdots,v_n$之间存在关系

$$v_i=(\varphi\circ\varphi'^{-1})\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j'}v_j'\right)\quad（在U\cap U'中），$$

x及x'分别是U及U'中的局部坐标。

2.6.2 流形上的积分

为了深入理解流形M上检试函数空间的对偶空间，须先定义流形上的积分。

对于具紧台的连续函数$f:R^n\to R$，在经典分析中理解定积分$\int f(x)dx$为含$\operatorname{supp}f$的任一矩块上的Riemann积分，且其值与所选矩块无关。

定义1 设U为R^n中开集，$\omega\in\Omega^n(U)$且具紧台。若关于R^n中标准基底有

$$\omega(u)=\omega_{i_1\cdots i_n}(u)\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_n}$$

$$=n!\,\omega_{1\cdots n}(u)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n,$$

$$\omega_{i_1\cdots i_n}(u)=\omega(u)\ (e_{i_1},\cdots,e_{i_n}),\quad \forall u\in U.$$

$(e_1,\cdots,e_n)$为标准基底，于是定义ω沿U的积分为

$$\int_U \omega = n!\int_U \omega_{1\cdots n}(u)\,dx_1\cdots dx_n.$$

为推广积分定义于流形，须建立变量代换法则，为此引进如下概念。

定义2 设M及N都是n维可定向流形，分别具体元Ω_M及Ω_N。若映射$f:M\to N$属C^∞，则使

$$f^*\Omega_N=(\det{}_{(\Omega_M\ \Omega_N)}f)\,\Omega_M$$

成立的唯一C^∞函数$\det_{(\Omega_M\ \Omega_N)}f\in\mathscr{F}(M)$称为$f$（关于$\Omega_M$及$\Omega_N$）的**行列式**。若$f:M\to M$，则简记这个行列式为$\det_{\Omega_M}f$。

定理1 设U及V为R^n中开集，$f:U\to V$为保向微分同胚（保向性指$f^*(\Omega_N)\in[\Omega_M]$）。若$\omega\in\Omega^n(V)$且具紧台，则拖射$f^*$的象$f^*\omega\in\Omega^n(U)$也具紧台，且

$$\int_U f^*\omega=\int_V\omega.$$

证 若$\omega=n!\omega_{1\cdots n}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$，据定义2有

$$f^*\omega=n!(\omega_{1\cdots n}\circ f)(\det{}_{\Omega_0}f)\Omega_0,$$

$$\Omega_0\equiv dx_1\wedge\cdots\vee dx_n.$$

因f为微分同胚，故$f^*\omega$也具紧台。于是

$$\int f^*\omega=n!\int(\omega_{1\cdots n}\circ f)\ (\det{}_{\Omega_0}f)dx_1\cdots dx_n.$$

由保向性知$\det_{\Omega_0}f>0$。用有限个球覆盖$\operatorname{supp}\omega$，可应用通常的积分变量变换公式：

$$\int\omega_{1\cdots n}dx_1\cdots dx_n=\int(\omega_{1\cdots n}\circ f)\ (\det{}_{\Omega_0}f)dx_1\cdots dx_n.$$

这表明$\int f^* \omega = \int \omega$.

定义3　设M为n维流形，且具定向$[\Omega]$。若$\omega \in \Omega^n(M)$且具紧台$K \subset U$，而(U, φ)为正定向细图，即$\varphi_*(\Omega|_U)$等价于标准体元Ω_0，则可定义ω在流形上的(局部)积分为

$$\int_{(\varphi)} \omega = \int_{U'} \varphi_*(\omega|_U),$$
$$U' = \varphi(U) \subset R^n.$$

定理2　设$\omega \in \Omega^n(M)$，且紧台$\operatorname{supp}\omega = K \subset U \cap V$，$(U, \varphi)$及$(V, \psi)$为$M$上二正定向细图，则有

$$\int_{(\varphi)} \omega = \int_{(\psi)} \omega.$$

证　取$f = \varphi \circ \psi^{-1}$：$V \to U$，则$f^* = (\varphi \circ \psi^{-1})^* = (\psi \circ \varphi^{-1})_*$。由定理1有

$$\int \varphi_*(\omega|_U) = \int (\psi \circ \varphi^{-1})_* \varphi_*(\omega|_U) = \int \psi_* \omega,$$

据定义3知定理成立。

这个定理表明$\int \omega$的定义与正定向细图的选择无关。

定义4　设M为定向流形，$\mathscr{A}$为由正定向细图组成的图集，$P = \{(U_i, \varphi_i, g_i)\}$为相应的单位分解，定义$\omega$沿$M$的(全局)积分为

$$\int_P \omega = \sum_i \int_{(\varphi_i)} \omega_i, \quad \omega_i = g_i \omega. \tag{2}$$

定理3　1) (2)右边的和仅含有限个项；

2) 对任何其它正定向细图图集及相应单位分解$Q = \{(V_i, \psi_i, h_i)\}$，有公同的值

$$\int_P \omega = \int_Q \omega.$$

这个值称为ω沿流形M的定积分，记作$\int\omega$.

证 对任一点$m\in M$，存在邻域U，使只有有限个g_i在U_i上不为零。因$\mathrm{supp}\,\omega$为紧集，可由有限个这种邻域覆盖，故(2)的右边的和中只有有限个项不为零。1)得证。为证明2)，注意函数列$\{g_i h_j\}$具性质：对所有的点$m\in M$，除有限个指标组合(i,j)外，$g_i h_j(m)=0$，且$\sum\limits_{i,j} g_i h_j\equiv 1$。于是得

$$\int_P\omega=\sum_i\int g_i\omega=\sum_{i,j}h_j g_i\omega\sum_j\int h_j\omega=\int_Q\omega.$$

定理4 设M及N都是n维定向流形，f：$M\to N$为保向的微分同胚。若$\omega\in\Omega^n(N)$具紧台，则$f^*\omega$亦然，且有等式

$$\int\omega=\int f^*\omega.$$

证 因$\mathrm{supp}\,f^*\omega=f^{-1}(\mathrm{supp}\,\omega)$，故为紧集。设$\{(U_i,\varphi_i)\}$为正定向细图图集，$P=\{g_i\}$为相应的单位分解，则$\{(f(U_i),\varphi_i\circ f^{-1})\}$为$N$上正定向细图图集，$Q=\{g_i\circ f^{-1}\}$为相应的单位分解。于是有

$$\begin{aligned}\int f^*\omega&=\sum_i\int_{(\varphi_i)}g_i f^*\omega=\sum_i\int\varphi_{i*}(g_i f^*\omega)\\&=\sum_i\int\varphi_{i*}(f^{-1})_*[(g_i\circ f^{-1})\omega]\\&=\sum_i\int(\varphi_i\circ f^{-1})_*(g_i\circ f^{-1})\omega\\&=\sum_i\int\psi_{i*}h_i\,\omega=\int_Q\omega=\int\omega,\end{aligned}$$

这里用到关系$f^*=(f^{-1})_*$.

定义5 设M为可定向流形，Ω为其上某个体元，$f\in\mathscr{F}(M)$且具紧台，可定义f关于Ω的积分为

$$\int_\Omega f=\int f\Omega .$$

2.6.3 张量分布

有一种等价定义，把$D'(M)$作为流形M上具紧台的C^∞函数空间$D(M)$的对偶空间；把$D'(M,E)$作为E的在M中具紧台的C^∞截口空间$D(M,E)$的对偶空间；而不是如2.6.1中那样用分布的局部表示列。利用对偶性，特别还可定义具给定类型的张量分布的空间。为此先赋予流形M一个C^∞ Riemann度量$h\in\mathscr{T}_2^0(M)$，即：h为二级共变张量，且对任一点$m\in M$，它是对称及正定的。空间$D(M,E)$及$D'(M,E)$应不依赖于h的选择。利用这个Riemann度量，可引进半范列，但涉及共变导数。设M上曲线$C(s)=(C_1(s),\cdots,C_n(s))$过点$x=C(s_1)$及点$y=C(s_2)$。记$\tau(s_2,s_1)t$为张量$t$沿曲线$C$由$x$移到$y$所得值，则$t$沿$C$在点$x$的共变导数定义为

$$\nabla t=\lim_{s_2\to s_1}\frac{\tau(s_2,s_1)t(x)-t(x)}{s_2-s_1},$$

$\begin{pmatrix} r\\ s\end{pmatrix}$型张量$t$在点$x$关于度量$h$的长度$|t(x)|$定义为（用哑指标作和记法）

$$|t(x)|=|t^{i_1\cdots i_k}(x)t_{i_1\cdots i_k}(x)|^{\frac{1}{2}},\quad k=r+s,$$

t的分量的指标可通过度量h上提或下落，例如：

$$t^{i_1,\cdots i_r\ i_{r+1}}_{j_2,\cdots j_s}=t^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_s}h^{j_1 i_{r+1}},$$

$$t^{i_1 \cdots i_{r-1}}_{j_1 \cdots j_s j_{s+1}} = t^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} h_{i_r j_{s+1}}.$$

这里$\{h^{ij}\}$为基本度量$h=\{h_{ij}\}$的逆

$$h_{ij}h^{jk}=\delta_i^k,$$

由于h的正定性及对称性，逆$h^{-1}=\{h^{ij}\}$存在。

于是可对M上C^∞张量t引进半范列：

$$p_{K,m}(t)=\sum_{\alpha\leq m}\sup_K|\nabla^\alpha t(x)|,\quad m=0,1,2,\cdots$$

K为M上任一紧集。故M上所有无穷可微的k级张量作成一个Fréchet空间，记作$\mathscr{E}(M,\otimes^k)$。类似地可定义具紧台K的k级C^∞张量的F空间$D(K,\otimes^k)$及其并LF空间$D(M,\otimes^k)$.

M上的k级张量分布空间$D'(M,\otimes^k)$定义为$D(M,\otimes^k)$的对偶空间。例如，局部L可积的张量$T(x)$可作为正则的张量分布，而如下作用于$D(M,\otimes^k)$中的张量t：

$$\langle T,t\rangle=\int_M(T(x),t(x))\eta_h,$$

其中$(T(x),t(x))$为张量内积$T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}t^{j_1\cdots j_s}_{i_1\cdots i_r}$，而$\eta_h$则为$M$关于Riemann度量$h$的体元

$$\eta_h=\sqrt{|h(x)|}\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n,$$

$D'(M,\otimes^k)$中拓扑也可由如下的半范族确定

$$p_t(T)=|\langle T,t\rangle|,\quad t\in D(M,\otimes^k)$$

可定义k级张量分布T的共变导数为$k+1$级张量分布∇T

$$\langle\nabla T,t\rangle=-\langle T,h\cdot\nabla t\rangle,$$

其中$h\cdot\nabla t$为张量t的缩积，在局部坐标下为

$$(h\cdot\nabla t)^{i_1\cdots i_k}=\nabla_j t^{j,i_1\cdots i_k},$$

∇_j为沿第j个坐标的共变微分算子。

2.6.4 流与密度

斜对称的张量分布称为**流**(current)，这个张量的级k称为流的**次数**(degree)，而$n-k$则称为这个流的**維数**。例如，k型式$\omega\in\Omega^k(M)$如下确定一个k次($n-k$维)的流

$$\langle\omega,\theta\rangle=\int_M\omega\wedge\theta,\quad\forall\theta\in D(M,\otimes^{n-k}).$$

零次流正是标量分布$f\in D'(M)$，而扩张了零型式概念。扩张n型式的流称为**密度**，它和测度（体元）一样变换

$$a'(x')dx_1'\cdots dx_n'=a(x)\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|dx_1\cdots dx_n.$$

这里x及x'是迭合覆盖$U\cap V$中的两组局部坐标，$\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|$为变换的Jacobi行列式的绝对值．一般地说，$M$上的**$\alpha$阶密度**是在局部坐标下服从如下变换规律的$n$次流

$$a'(x)dx_1'\cdots dx_n'=a(x)\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^\alpha dx_1\cdots dx_n.$$

α阶密度也可看作M上一维丛(线丛)Ω_α的截口，这线丛由迁移函数$\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|$所确定．

例2　设S为R^n中$n-1$维子流形．若S由方程$x_1=0$确定，则S上的Dirac测度δ_S如下定义

$$(\delta_S,\varphi)=\int\varphi(0,x_2,\cdots,x_n)dx_2\cdots dx_n.$$

若S由无临界点的C^1函数$f(x)=0$确定，则δ_S定义为

$$(\delta_S,\varphi)=\int_S\varphi\omega,$$

ω为S的Leray型式，而由下式确定：

$$df\wedge\omega=dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n,$$

因f无临界点，在S上每点的邻域中，ω可表为下列等价表示之一：

$$\omega=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^{-1}dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\omega=\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{-1}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n-1};$$

故δ_S是S上的密度.

最后提一下流形上的线性微分算子. 作用于M上k级张量分布T的m阶线性微分算子L是线性映射

$$L:\ D'(M,\otimes^k)\to D'(M,\otimes^q).$$

L的具体表示是

$$L:\ T\to\sum_{l<m}a_l\nabla^lT.$$

其中a_l是M上向量丛的C^∞截口，这向量丛在点x的纤维是线性映射空间

$$\mathscr{L}([\otimes T_x(M)]^{k+m},\ [\otimes T_x(M)]^q).$$

这里$[\otimes T_x(M)]^j$表示j个切空间T_xM的张量积.

例3 Lie导数

$$V\to\mathscr{L}(V)h:\quad D'(M,\otimes^1)\to D'(M,\otimes^2)$$

在局部坐标下定义为(h为M上Riemann度量)

$$(\mathscr{L}(V)h)_{ij}=\nabla_iV_j+\nabla_jV_i,$$

V为向量，足标表示分量编号.

例4 外导数

$$d:\ \omega\to d\omega:\ (d\omega)_{i_1,\cdots,i_j}=(-1)^{k-1}\nabla_{i_k}\omega_{i_1,\cdots,\hat{i}_k,\cdots,i_j}.$$

本节取材于Y. Choquet-Bruhat et al., Analysis, Manifolds and Physics, IVB1, VIB8., North-Holland, Amsterdam, 1977.

本章主要参考书

A. Friedman, *Generalized Functions and Partial Differential Equations*, Prentice-Hall, New Jersey, 1963, Chap.1—4.

И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, *Обобщённые Функции*, 2, Гос. Изд., Москва, 1958. Гл. I—II.

L. Schwartz, *Théorie des Distributions* I, II, Hermann, Paris, 1950/51; 2nd ed., 1966.

F. Treves, *Topological Vector Spaces Distributions and Kernels*, Academic Press, New York, 1969.

3. 拟微分算子

从历史的角度看，拟微分算子是奇异积分算子与近代Fourier分析相结合的产物。虽然早在三十年代由于研究椭圆型偏微分算子的边值问题已导致奇异积分算子理论的深入研究，但拟微分算子概念的正式提出及其理论的系统建立，则是六十年中期才开始的。

从逻辑的角度看，拟微分算子也可以看作是线性偏微分算子的推广，是微分算子与积分算子在更高层次上的统一。这种推广和统一的关键在于线性偏微分算子的Fourier表示。

设域$X\subset R^n$。考虑X上的线性偏微分算子

$$P(x,D)\equiv\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha(x)D^\alpha,\quad a_\alpha(x)\in C^\infty(X).\tag{1}$$

记$u(x)\in C_0^\infty(X)$的Fourier变换为$\widehat{u}(\xi)$，由反转公式有，

$$u(x)=\int\widehat{u}(\xi)e^{ix\xi}đ\xi,\quad đ\xi=(2\pi)^{-n}d\xi,\tag{2}$$

于是可得算子$P(x,D)$的Fourier表示

$$P(x,D)u=\int e^{ix\xi}P(x,\xi)\widehat{u}(\xi)đ\xi,\tag{3}$$

或 $$P(x,D)u=\iint e^{i(x-y)\xi}P(x,\xi)u(y)dyđ\xi,\tag{3'}$$

其中

$$P(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

称为算子$P(x,D)$的**符征**或全符征，而

$$P_m(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\xi^\alpha,$$

则称为算子P的主符征。它们在线性偏微分子算子理论中起着十分重要的作用。特别，算子P的转置算子${}^tP$、伴算子P^*以及两个算子$P(x,D)$及$Q(x,D)$的合成算子$P\circ Q$，都可通过符征的简单运算来表达。

所谓拟微分算子，就其实质而言，是将式(3)或(3′)中关于ξ的多项式$P(x,\xi)$推广到更广泛的一类函数时所得的一类算子。

这种推广当然不是漫无边际的。一方面，它必须保持线性偏微分算子的某些重要性质，例如，关于转置、伴随及合成等运算应当是封闭的，特别应能定义拟微分算子的符征，而且上述几种运算可通过符征的运算来实现；另一方面，为了研究的需要，应期望尽可能多的线性偏微分算子的“逆算子”（如果存在）包含在推广后的算子类中。这两方面的要求是相互限制的。由于侧重面的不同，引出不同类型的拟微分算子，而表现于把关于ξ的多项式类$P(x,\xi)$推广到怎样的函数类。

本章主要介绍L. Hörmander所引进的拟微分算子类$L^m_{\rho,\delta}(X)$，其符征属于函数类$S^m_{\rho,\delta}(X\times R_n)$，确切含义将在以后给出。从现有的各类拟微分算子看，上述两方面的要求在类$L^m_{\rho,\delta}(X)$中得到比较均衡的满足。因此，掌握本章的内容，将有助于研究更复杂或更特殊的拟微分算子类。

拟微分算子的出现，为研究一般线性偏微分算子提供了一个有力和方便的工具，在其本身的研究中也产生了许多有独立意义的新课题。但在处理像波动方程一类方程的有关问题时，它的作用受到了限制。为了解决这个困难，Hörmander于七十年代初引进Fourier积分算子并作了系统研究。粗略地说，

Fourier积分算子是在拟微分算子的基础上，又把式(3)或(3′)中的$i(x,\xi)$或$i(x-y,\xi)$推广到某类函数$i\varphi(x,\xi)$或$i\varphi(x,y,\xi)$而得的一类算子。因此，拟微分算子是Fourier积分算子的特殊情形。

基于Fourier积分算子的重要性以及它与拟微分算子的密切关系，本章将先简要地介绍Fourier积分算子的概念及其局部理论，然后引出拟微分算子。

3.1 振荡积分

3.1.1 函数类$S^m_{\rho,\delta}$

定义1 设域$X\subset \boldsymbol{R}^n$，$m,\rho,\delta$都是实数，且$0\leqslant\rho,\delta\leqslant 1$，用$S^m_{\rho,\delta}(X\times \boldsymbol{R}_N)$记所有具如下性质的函数$a(x,\theta)$的集合：$a(x,\theta)\in C^\infty(X\times \boldsymbol{R}_N)$，并且对任二指标组$\alpha$，$\beta$及任意紧集$K\subset X$，存在常数$C_{\alpha,\beta,K}>0$，使下列估式成立：

$$|\partial_\theta^\alpha\partial_x^\beta a(x,\theta)|\leqslant C_{\alpha,\beta,K}(1+|\theta|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},\qquad (1)$$
$$\forall (x,\theta)\in K\times \boldsymbol{R}_N$$

注1 若存在某常数$r_0>0$，使(1)仅对满足$x\in K$且$|\theta|\geqslant r_0$的(x,θ)成立，则称a关于大的$|\theta|$属于$S^m_{\rho,\delta}(X\times \boldsymbol{R}_N)$。

注2 若有含参变量$\tau\in T\subset R^1$的一族函数$a_\tau(x,\theta)\in S^m_{\rho,\delta}(X\times \boldsymbol{R}_N)$，且对于此族中的所有$a_\tau$，式(1)中的$C_{\alpha,\beta,K}$可取得与$\tau$无关，则称$a_\tau(x,\theta)$关于$\tau\in T$一致地属于$S^m_{\rho,\delta}(X\times \boldsymbol{R}_N)$。类似地可定义$a_\tau$关于大的$|\theta|$一致地属于$S^m_{\rho,\delta}(X\times \boldsymbol{R}_N)$。

今后在不致引起混淆时，把$S^m_{\rho,\delta}(X\times \boldsymbol{R}_N)$简记为$S^m_{\rho,\delta}$，并约定

$$S^{+\infty}_{\rho,\delta}=\bigcup_{m\in \boldsymbol{R}} S^m_{\rho,\delta};$$

$$S^{-\infty}_{\rho,\delta}=\bigcap_{m\in R}S^m_{\rho,\delta};$$

$$S^m=S^m_{1,0}.$$

容易核验$S^m_{\rho,\delta}$的下列性质：

1) 若$m\leqslant m'$，$\rho\geqslant\rho'$，$\delta\leqslant\delta'$，则

$$S^m_{\rho,\delta}\subset S^{m'}_{\rho',\delta'}.$$

2) 若$a\in S^m_{\rho,\delta}$，$b\in S^{m'}_{\rho,\delta}$，则

$$ab\in S^{m+m'}_{\rho,\delta},$$

$$a+b\in S^{m''}_{\rho,\delta},\quad m''=\max(m,m').$$

3) 若$a\in S^m_{\rho,\delta}$，则$D^\alpha_\theta D^\beta_x a\in S^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}_{\rho,\delta}$.

例1 设m为非负整数，$a_\alpha(x)\in C^\infty(X)$，$|\alpha|\leqslant m$，则

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)\theta^\alpha\in S^m(X\times\boldsymbol{R}_n).$$

例2 设$m\in R,\theta\in\boldsymbol{R}_N$，则

$$\langle\theta\rangle^m\equiv(\sqrt{1+|\theta|^2})^m\in S^m(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}_N).$$

例3 设$f(x,\theta)\in C^\infty[X\times(\boldsymbol{R}_N\setminus 0)]$，$f$关于$\theta$为正齐$m$次的，即：对每个$t>0$及$(x,\theta)\in X\times\boldsymbol{R}_N$，有

$$f(x,t\theta)=t^mf(x,\theta),$$

则关于大的$|\theta|$，有$f\in S^m$；若$f\in C^\infty(X\times\boldsymbol{R}_N)$，且关于大的$|\theta|$是$\theta$的正齐$m$次函数，即存在常数$r>0$，当$x\in X_1,\theta\in\boldsymbol{R}_N$，$t|\theta|>r$时，有

$$f(x,t\theta)=t^mf(x,\theta),\quad t>0,$$

则$f\in S^m$.

例2可由数学归纳法建立估式(1)而获证。下面给出例3的后半部证明. 记

$$\omega_r=\{\theta:\ |\theta|<r,\ \theta\in\boldsymbol{R}_N\},\quad S_r=\partial\omega_r,$$

对每个紧集$K\subset X$，当$(x,\theta)\in K\times(\boldsymbol{R}_N\setminus\omega_r)$且$t|\theta|\geqslant r$时，

应有

$$(D_\theta^\alpha D_x^\beta f)(x,t\theta)=t^{m-|\alpha|}D_\theta^\alpha D_x^\beta f(x,\theta)。$$

特别取 $t=\frac{r}{|\theta|}$，可得

$$|D_\theta^\alpha D_x^\beta f(x,\ \theta)|=\left(\frac{|\theta|}{r}\right)^{m-|\alpha|}\left|(D_\theta^\alpha D_x^\beta f)\left(x,\ \frac{r\theta}{|\theta|}\right)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{r^{m-|\alpha|}}(1+|\theta|)^{m-|\alpha|}\sup_{K\ S_r}|D_\theta^\alpha D_x^\beta f(x,\theta)|$$

$$=C'_{\alpha\ \beta.\ K}(1+|\theta|)^{m-|\alpha|}。$$

记 $C''_{\alpha.\ \beta\ \ K}=\sup\limits_{K\times\omega_r}\frac{|D_\theta^\alpha D_x^\beta f(x,\theta)|}{(1+|\theta|)^{m-|\alpha|}}$，令 $C_{\alpha.\ \beta.\ K}=\max(C',C'')$，

则当 $(x,\ \theta)\in X\times\boldsymbol{R}_N$ 时，有

$$|D_\theta^\alpha D_x^\beta f(x,\theta)|\leqslant C_{\alpha.\ \beta\ \ K}(1+|\theta|)^{m-|\alpha|},$$

故 $f\in S^m$。

例4 设 $f(\theta)\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}_N)$，且当 $|\theta|\leqslant\frac{1}{2}$ 时为1，当 $|\theta|\geqslant1$ 时为零。对 $a(x,\theta)\in S^m_{\rho.\ \delta}(X\times\boldsymbol{R}_N)$，记

$$b_\varepsilon(x,\theta)=f(\varepsilon\theta)a(x,\theta),$$

则 $b_\varepsilon(x,\theta)$ 关于 $\varepsilon\in(0,1)$ 一致地属于 $S^m_{\rho.\ \delta}(X\times\boldsymbol{R}_N)$。

事实上，记 $f_\varepsilon(\theta)=f(\varepsilon\theta)$。由于 $f(\theta)\in S^0(X\times\boldsymbol{R}_N)$，有

$$|D_\theta^\alpha f_\varepsilon(\theta)|=\varepsilon^{|\alpha|}|(D_\theta^\alpha f)(\varepsilon\theta)|\leqslant\varepsilon^{|\alpha|}(1+|\varepsilon\theta|)^{-|\alpha|}$$

$$\leqslant C_\alpha(1+|\theta|)^{-|\alpha|},$$

其中 C_α 与 ε 无关，故 $f_\varepsilon(\theta)$ 关于 $\varepsilon\in(0,\ 1)$ 一致地属于 $S^0(X\times\boldsymbol{R}_N)$。又因 $a\in S^m_{\rho.\ \delta}(X\times\boldsymbol{R}_N)$ 且 a 不依赖于 ε，据性质1)及2)知 $b_\varepsilon=f_\varepsilon a$ 关于 $\varepsilon\in(0,1)$ 一致地属于 $S^m_{\rho.\ \delta}(X\times\boldsymbol{R}_N)$。

顺便指出，虽然对每个 $\varepsilon\in(0,1)$ 有 $b_\varepsilon\in S^{-\infty}$，但是并非一致地属于 $S^{-\infty}$，甚至并非一致地属于 $S^{m'}_{\rho.\ \delta}(m'<m)$，

3.1.2 振荡积分及其正规化

定义2 设实值函数$\varphi(x,\theta)\in C^\infty(X\times(\boldsymbol{R}_N\setminus 0))$，关于$\theta$为正齐一次，且当$\theta\neq 0$时无临界点，即：

$$\varphi'_{x\ \theta}\equiv(\varphi_{x_1},\ \cdots,\varphi_{x_n},\varphi_{\theta_1},\cdots,\varphi_{\theta_N})\neq(0,\cdots,0),\ \ \theta\neq 0,$$

则称φ为**位相函数**，简称为**位相**(phasc)。

定义3 若$a(x,\theta)\in S^m_{\rho,\delta}(X\times\boldsymbol{R}_N)$，$\varphi(x,\theta)$为位相，则称积分

$$I_\varphi(au)=\iint e^{i\varphi(x,\theta)}a(x,\theta)u(x)d\theta,\quad u\in C_0^\infty(X) \tag{2}$$

为**振荡积分**，称a为其**振幅**，φ为其位相。

注意式(2)在通常意义下可能是发散积分。下面通过正规化来赋予它一种确切的意义。为此，先证明下面的引理。

引理1 设$\varphi(x,\theta)$是定义于$X\times\boldsymbol{R}_N$的位相函数，则存在一阶线性微分算子

$$L=\sum_{j=1}^N a_j(x,\ \theta)\frac{\partial}{\partial\theta_j}+\sum_{k=1}^n b_k(x,\theta)\frac{\partial}{\partial x_k}+c(x,\ \theta)$$

满足条件：

1) $a_j\in S^0$，$j=1,\cdots,N$；$b_k\in S^{-1},k=1,\cdots,n$；$c\in S^{-1}$；

2) 若定义L的转置算子${}^tL$如下：

$${}^tLu=-\sum_{j=1}^N\frac{\partial}{\partial\theta_j}(a_ju)-\sum_{k=1}^n\frac{\partial}{\partial x_k}(b\ u)+cu,$$

则有

$${}^tLe^{i\varphi}=e^{i\varphi}.$$

证 首先注意，若${}^tL=M$，则${}^tM=L$；反之亦然。其次，

若L的系数满足条件1)，则把${}^tL$改写为通常的标准形式后，其系数也满足条件1)；反之亦然。故若能求得某个一阶算子M，满足条件1)及关系$Me^{i\varphi}=e^{i\varphi}$，则$L={}^tM$即为所求。

M可如下求得。由

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}e^{i\varphi}=i\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}e^{i\varphi},\qquad \frac{\partial}{\partial x_k}e^{i\varphi}=i\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}e^{i\varphi},$$

有

$$-\left(\sum_{j=1}^{N}i\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}|\theta|^2\frac{\partial}{\partial\theta_j}+\sum_{k=1}^{n}i\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)e^{i\varphi}$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{N}|\theta|^2\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}\right|^2+\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right|^2\right)e^{i\varphi}=\frac{1}{\psi}e^{i\varphi},$$

其中ψ即由最后的恒等式定义.由位相函数的定义知$\psi\in C^\infty(X\times(\boldsymbol{R}_N\setminus 0))$且关于$\theta$是正齐$-2$次的，故当$\theta\neq 0$时得

$$-i\psi\left(\sum_{j=1}^{N}|\theta|^2\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)e^{i\varphi}=e^{i\varphi}$$

剩下只须消去上式左边系数的奇性。为此取

$$\tau(\theta)\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}_N),\quad \tau(\theta)=\begin{cases}1, & 当|\theta|\leqslant\dfrac{1}{4};\\[2mm] 0, & 当|\theta|>\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

令

$$M=\sum_{j=1}^{N}-i(1-\tau)\psi|\theta|^2\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}-i(1-\tau)\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}+\tau,$$

显然有$Me^{i\varphi}=e^{i\varphi}$，且$M$的系数满足要求1)。试以$\frac{\partial}{\partial\theta_j}$的系数为例，进行验证。易知$\psi$，$|\theta|^2$，$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}$分别是$\theta$的正齐$-2,2,0$次函数，故其乘积为正齐零次的，于是$-i(1-\tau)\psi|\theta|^2\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}$关于大的$|\theta|$为正齐零次函数，且在$X\times\boldsymbol{R}_N$上无穷可微，由3.1.1例3知它属于$S^0$。

注3 若$\varphi'_\theta=(\varphi_{\theta_1},\cdots,\varphi_{\theta_N})\neq 0$，则可取

$$M=\sum_{j=1}^{N}-i(1-\tau)\psi|\theta|^2\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}+\tau,$$

这时$L={}^tM$中的系数$b_k\equiv 0$，$k=1,\cdots,n$。

下面应用引理1对(2)进行正规化。今后总是假定$\rho>0$，$\delta<1$。

先作如下的考虑：当$m<-N$时，积分(2)在通常意义下绝对收敛，并可分部积分。把$e^{i\varphi}={}^tLe^{i\varphi}$代入，进行分部积分，并重复这种运算$l$次，可得

$$I_\varphi(au)=\iint e^{i\varphi}L^l(au)dx\,d\!\!{}^-\theta. \qquad (2')$$

当$m\geqslant -N$时，虽然(2)在通常意义下不一定收敛，从而一般不能转化为(2′)。但容易看出当$l\geqslant\frac{m+N+1}{s}$时，$s=\min(\rho,1-\delta)$，有

$$L^l(au)\in S^{m-ls}_{\rho,\delta}\subset S^{-N-1}_{\rho,\delta},$$

由此知(2′)的右边就其本身而言是绝对收敛的。于是可把这个积分定义为形式积分(2)的**正规化**。为了说明这种正规化定义

的合理性，必须证明当 $l \geqslant \frac{m+N+1}{s}$ 时，由(2′)右边给出的积分值不依赖于算子L及数 l 的选择。下面就来证明这一点。为此，取$\tau_\varepsilon(\theta)=\tau(\varepsilon\theta)$，而$\tau$为3.1.1例4中的$f$；$\varepsilon\in(0,1)$。记

$$I_{\varphi,\varepsilon}(au)=\iint e^{i\varphi(x,\theta)}\tau_\varepsilon(\theta)a(x,\theta)u(x)dx\,d\theta,$$

$$u\in C_0^\infty(X)。$$

由例4知$\tau_\varepsilon au$关于$\varepsilon\in(0,1)$一致地属于$S^m_{\rho,\delta}$，故当L满足引理1的条件时，知$L^l(\tau_\varepsilon au)$关于$\varepsilon\in(0,1)$一致地属于$S^{m-ls}_{\rho,\delta}$，$s=\min(\rho,1-\delta)$。因此，当$l\geqslant\frac{m+N+1}{s}$时，

$$|e^{i\varphi}L^l(\tau_\varepsilon au)|\leqslant C_K(1+|\theta|)^{-N-1},\quad K=\mathrm{supp}\,u$$

且C_K为不依赖于$(\varepsilon,\ x,\ \theta)$的正数。于是由实变数函数论中的Lebesgue控制收敛定理可得：

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}I_{\varphi,\varepsilon}(au)&=\lim_{\varepsilon\to0}\iint e^{i\varphi}L^l(\tau_\varepsilon au)dx\,d\theta\\&=\iint e^{i\varphi}\lim_{\varepsilon\to0}L^l(\tau_\varepsilon au)dx\,d\theta=\iint e^{i\varphi}L^l(au)dx\,d\theta,\end{aligned}$$

即

$$\iint e^{i\varphi}L^l(au)dx\,d\theta=\lim_{\varepsilon\to0}\iint e^{i\varphi}\tau_\varepsilon au\,dx\,d\theta \tag{3}$$

上式右边既不含L，也不含l，故左边的值实际上不依赖于L及l。

因此，可以合理地把式(2′)右边定义为振荡积分(2)的正规化。今后凡遇到振荡积分，总理解为它的正规化。

注4 也可把(3)的右边定义为振荡积分(2)的正规化。由于式(3)的左边不依赖于τ，故其右边亦然。所以，这样定义的正规化不依赖于τ的选取。式(3)还表明，这两种正规化定义是完全一致的。今后将根据不同的需要而选用其中的一种。

3.1.3 由振荡积分定义的广函

结合式(2)中的位相φ，引进重要点集

$$C_\varphi \equiv \{(x,\theta): x\in X,\theta\in \mathbf{R}_N\setminus 0,\varphi_{\theta_j}=0,j=1,\cdots,N\},\tag{4}$$

由于φ_{θ_j}关于θ是正齐零次的，故C_φ是$X\times(\mathbf{R}_N\setminus 0)$中的**锥形集**，即：若$(x_0,\theta_0)\in C_\varphi$，则对所有的$t>0$，也有$(x_0,t\theta_0)\in C_\varphi$。还可看出，$C_\varphi$是闭集。

记π为自然投影。

$$\pi: X\times(\mathbf{R}_N\setminus 0)\to X,$$

即若$(x,\theta)\in X\times(\mathbf{R}_N\setminus 0)$，则$\pi(x,\theta)=x$。记

$$S_\varphi=\pi C_\varphi;\quad R_\varphi=X\setminus S_\varphi.$$

命题1 对固定的位相φ及振幅a，由振荡积分所定义的泛函A

$$(A,u)=I_\varphi(au),\quad \forall u\in\mathscr{D}(X)\tag{5}$$

属于$\mathscr{D}'(X)$。

证 设函数列$\{u_j(x)\}\subset\mathscr{D}(X)$且在其中收敛于零。据2.3.1中定义，知存在紧集$K_0\subset X$，使$\operatorname{supp}u_j\subset K_0$，$j=1,2,\cdots$，且$u_j$的各阶导数当$j\to\infty$时在$K_0$上一致地趋于零。仿照3.1.2中关于正规化的讨论，知$L^l(a(x,\theta)u_j(x))$关于j一致地属于$S^{m-l\varepsilon}_{\rho,\delta}$，且当$l$充分大时，有

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}(A,u_j)&=\lim_{j\to\infty}\iint e^{i\varphi(x,\theta)}L^l(au_j)dx\,d\theta\\&=\iint e^{i\varphi(x,\theta)}L^l[a(x,\theta)\lim_{j\to\infty}u_j(x)]dx\,d\theta=0,\end{aligned}$$

故$A\in\mathscr{D}'(X)$。

下面揭示广函A的一些性质。

定理1 $\text{sing supp}\, A \subset S_\varphi$

或等价地表述为

$$A \in C^\infty(R_\varphi). \tag{6}$$

证 只须证存在函数$A(x)\in C^\infty(R_\varphi)$，使

$$I_\varphi(au)=\int A(x)u(x)dx, \quad \forall u\in C_0^\infty(R_4). \tag{7}$$

据注 3 知，当$(x,\theta)\in \boldsymbol{R}_\varphi$时，可取$L_\theta$不含$\partial_x$，故

$$I_\varphi(au)=\iint e^{i\varphi(x,\theta)}[L_\theta^l a(x,\theta)]u(x)d\!\!\!{}^-\theta,$$

记

$$A(x)=\int e^{i\varphi(x,\theta)}L_\theta^l a(x,\theta)d\!\!\!{}^-\theta,$$

即有表示式(7)。今证明 $A(x)\in C^\infty(R_\varphi)$，为此只须证：对$R_\varphi$的每个有界的开子集$\Omega$，有

$$A(x)\in C^\infty(\Omega), \tag{8}$$

记

$$A_\alpha(x)=\int D_x^\alpha[e^{i\varphi(x,\theta)}L_\theta^l a(x,\theta)]d\!\!\!{}^-\theta. \tag{9}$$

今证上式右边的积分关于参变量$x\in\Omega$一致地绝对收敛。事实上，用数学归纳法容易建立如下的估计式

$$|D_x^\beta e^{i\varphi(x,\theta)}|\leqslant C_\beta(1+|\theta|)^{|\beta|},\quad (x,\theta)\in\Omega\times \boldsymbol{R}_N\setminus 0), \tag{10}$$

其中常数C_β只与Ω有关，而与x无关。

注意到$L_\theta^l a\in S_{\rho,\delta}^{m-sl}$，应用Leibniz微分法则及(10)，有

$$|D_x^\alpha[e^{i\varphi(x,\theta)}L_\theta^l a(x,\theta)]|\leqslant C_\alpha'(1+|\theta|)^{m-sl+|\alpha|},$$
$$(x,\theta)\in\Omega\times(\boldsymbol{R}_N\setminus 0), \tag{11}$$

其中常数C_α'与x无关。对固定的α，取$l\geqslant\frac{m+N+1+|\alpha|}{s}$，则

由(11)知式(9)右边关于$x\in\Omega$一致收敛，且有

$$D_x^\alpha A(x)=D_x^\alpha\int e^{i\varphi(x,\theta)}L_\theta^l a(x,\theta)d\theta$$

$$=\int D_x^\alpha[e^{i\varphi(x,\theta)}L_\theta^l a(x,\theta)]d\theta$$

$$=A_\alpha(x)\in C(\Omega).$$

由α及$\Omega\subset R_\varphi$的任意性知$A(x)\in C^\infty(R_\varphi)$。证毕。

推论1 设$a\in S^m_{\rho,\delta}(X\times\mathbf{R}_N)$，且$a$在$C_\varphi$的某个锥邻域中为零，则$A\in C^\infty(X)$。

证 由假定知在$\operatorname{supp}a$上$|\varphi'_\theta|\neq0$，故可重复定理1的证明而得推论1。

定义4 设φ为位相函数，若向量组

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}\right)\equiv\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial\theta_j},\cdots,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial\theta_j},\frac{\partial^2\theta}{\partial\theta_1\partial\theta_j},\cdots,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_N\partial\theta_j}\right),\qquad j=1,\cdots,N.$$

在集C_φ上线性无关，或等价地表述为：若$N\times(N+n)$矩阵

$$(\varphi''_{\theta\theta},\varphi''_{\theta x})\equiv\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_1\partial\theta_1},\cdots, & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_1\partial\theta_N}, & \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial\theta_1\partial x_1},\cdots, & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_1\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_N\partial\theta_1},\cdots, & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_N\partial\theta_N}, & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_N\partial x_1},\cdots, & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_N\partial x_n}\end{pmatrix}$$

的秩为N，则称φ为**非退化**的位相函数。

定理2 设φ为非退化位相，则C_φ为$X\times(\mathbf{R}_N\setminus0)$的$n$维子流形。

证 记$\varphi_j=\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}$，$j=1,\cdots,N$. 考虑映射

$f: X\times(\boldsymbol{R}_N\setminus 0)\to\boldsymbol{R}_N$: $f(x,\theta)=(\varphi_1(x,\theta),\cdots,\varphi_N(x,\theta))$.
由非退化位相的定义及C_φ的定义知，$\boldsymbol{R}_N$中的零向量$(0,\cdots,0)$为映射f的正则值、据1.4.4中原像定理知$C_\varphi=f^{-1}(0,\cdots,0)$为$X\times(\boldsymbol{R}_N\setminus 0)$的$n$维子流形。证毕。

对于非退化位相，推论1的结果还可以改进。为此先叙述$S^m_{\rho,\delta}$中函数的变量代换。这在其它地方也是要用到的。

设U为$R^n\times\boldsymbol{R}_N$中关于$\theta$为锥集的任一个域。称$a$属于$S^m_{\rho,\delta}(U)$，若对任意集$K\subset(R^n\times\sigma^{N-1})\cap U$及任二指标组与$\alpha$与$\beta$，这里$\sigma^{N-1}$为$\boldsymbol{R}_N$中的单位球面，存在常数$C=C(\alpha,\beta,K)>0$，使估计式(1)当$\left(x,\dfrac{\theta}{|\theta|}\right)\in K$及$|\theta|\geqslant 1$时成立。

以后简称乘积空间中关于第二个变元为锥集的域为锥域。

设f为由锥域$V\subset\boldsymbol{R}^{n_1}\times\boldsymbol{R}_{N_1}$到锥域$U\subset\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}_N$($n_1+N_1=n+N$)的微分同胚

$$f:(y,\eta)\in V\to(x(y,\eta),\theta(y,\eta))\in U,$$

且x及θ关于η分别为正齐零次及一次的。记

$$b(y,\eta)=a(x(y,\eta),\theta(y,\eta))=(a\circ f)(y,\eta),\qquad(12)$$

则有如下结果。

引理2 设$a(x,\theta)\in S^m_{\rho,\delta}(U)$，且下列条件之一成立：

a) $\rho+\delta=1$;

b) $\rho+\delta\geqslant 1$且$x=x(y)$与η无关；

c) $x=x(y)$，$\theta=\theta(\eta)$；

则$b\in S^m_{\rho,\delta}(V)$.

证 设K_1为$(\boldsymbol{R}^{n_1}\times\sigma^{N_1-1})\cap V$中任一紧集。当$\left(y,\dfrac{\eta}{|\eta|}\right)\in K_1$时，由$\theta(y,\eta)$的连续性及关于$\eta$的正齐一次性，知有

$$1+|\theta|=1+|\eta|\left|\theta\left(y,\ \frac{\eta}{|\eta|}\right)\right|$$

$$\leqslant 1+|\eta|\sup_{K_1}|\theta(y,\eta)|\leqslant C_1(K_1)(1+|\eta|)$$

$$C_1(K_1)=\max(1,\ \sup_{K_1}|\theta(y,\eta)|)>0.$$

同理可得

$$1+|\theta|\geqslant C_2(K_1)(1+|\eta|)$$
$$C_2(K_1)=\min(1,\ \inf_{K_1}|\theta(y,\eta)|)$$

据正齐一次性假定及f的微分同胚性，易知当且仅当 $\eta=0$ 时，才有$\theta=0$，故$C_2(K_1)$为正的常数．结合所得两侧估计，知存在常数$C_1(K_1)>0$及$C_2(K_1)>0$，使

$$C_2(1+|\eta|)\leqslant 1+|\theta|\leqslant C_1(1+|\eta|),\quad \forall\left(y,\ \frac{\eta}{|\eta|}\right)\in K_1.$$

记$K=(R^n\times\sigma^{N-1})\cap f(K_1)$，易知$K$为紧集，且$\left(x,\ \frac{\theta}{|\theta|}\right)\in K$。故有

$$|b(y,\eta)|=|a(x(y,\eta),\theta(y,\eta))|\leqslant C(K)(1+|\theta|)^m$$
$$\leqslant\begin{cases}C(K)[C_1(K_1)]^m(1+|\eta|)^m, & 当m\geqslant 0;\\ C(K)[C_2(K_1)]^m(1+|\eta|)^m, & 当m<0,\end{cases}$$

即存在常数$C(K_1)>0$，使

$$|b(y,\eta)|\leqslant C(K_1)(1+|\eta|)^m,\ \forall\left(y,\ \frac{\eta}{|\eta|}\right)\in K_1.$$

上式表明，当$|\alpha+\beta|=0$时，b满足估式(1)。

现在应用数学归纳法．设$|\alpha+\beta|=k$ 时，估式(1)对 b 成立。当$|\alpha+\beta|=k+1$时，易知$|\alpha|$及$|\beta|$中至少有一个不为零．不妨设$|\beta|\neq 0$。当$|\alpha|\neq 0$时，证明类似。令$\beta=\beta'+\beta''$，其中

$|\beta''|=1$。为确定起见，可认为$|\beta''|=(1,0,\cdots,0)$。记

$$b_1(y,\eta)=D_{y_1}b(y,\eta),\quad a_1(x,\theta)=b_1(y,\eta)\circ f^{-1}(x,\theta),$$

若能证$a_1\in S^{m+\delta}_{\rho,\delta}(U)$，则由$|\alpha+\beta'|=k$及$b_1=a_1\circ f$知有：

$$\begin{aligned}|D^\alpha_\eta D^\beta_y b(y,\eta)|&=|D^\alpha_\eta D^{\beta'}_y b_1(y,\eta)|\\&\leqslant C(\alpha,\beta',K_1)(1+|\eta|)^{m+\delta-\rho|\alpha|+\delta|\beta'|}\\&=C'(\alpha,\beta,K_1)(1+|\eta|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},\\&\quad\forall\left(y,\frac{\eta}{|\eta|}\right)\in K_1,\end{aligned}$$

即b对任何α及β满足估式(1)。因此，关键在于证明$a_1\in S^{m+\delta}_{\rho,\delta}(U)$。为此可注意

$$a_1(x,\theta)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a(x,\theta)}{\partial x_j}\left(\frac{\partial x_j}{\partial y_1}\right)(y(x,\theta),\eta(x,\theta))$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial a(x,\theta)}{\partial\theta_l}\left(\frac{\partial\theta_l}{\partial y_1}\right)(y(x,\theta),\ \eta(x,\theta)),\tag{13}$$

显然有$\dfrac{\partial a(x,\theta)}{\partial x_j}\in S^{m+\delta}_{\rho,\delta}(U)$。据关于$x$及$\theta$对$\eta$的正齐次性假定，知函数$\dfrac{\partial x_j}{\partial y_1}(y(x,\theta),\eta(x,\theta)$关于$\theta$为正齐零次的，故属于$S^0(U)$。由此知(13)的第一个和属于$S^{m+\delta}_{\rho,\delta}(U)$。在第二个和中，$\dfrac{\partial a(x,\theta)}{\partial\theta_l}\in S^{m-\rho}_{\rho,\delta}(U)$，相应的因子是光滑函数，且关于$\theta$为正齐一次的，因此属于$S^0(U)$。故第二个和属于类$S^{m-\rho+1}_{\rho,\delta}(U)$。

当$\rho+\delta\geqslant1$时，有$S^{m-\rho+1}_{\rho,\delta}\subset S^{m+\delta}_{\rho,\delta}$，故$a_1\in S^{m+\delta}_{\rho,\delta}(U)$。

当$\theta=\theta(\eta)$时，有$\dfrac{\partial\theta_l}{\partial y_1}\equiv0$，$l=1,\cdots,N$。这时式(13)右边

只剩下第一个和，故仍有$a_1 \in S^{m+\delta}_{\rho,\delta}(U)$。

综合上面所证，知引理 2 成立。

注5 虽然在上述证明中不曾用到引理中的某些条件，例如c)中关于$x=x(y)$的假定，但是，在$|\beta|=0$的情形却要用到它们。

引理3 设U为$R^n\times(R_N\setminus 0)$中的锥域，$\varphi_j(x,\theta)\in C^\infty(U)$，$j=1,\cdots,k$，关于$\theta$为正齐零次的，且$\nabla\varphi_j(j=1,\cdots,k)$在集$C=\{(x,\theta)\in U;\ \varphi_j(x,\theta)=0, j=1,\cdots,k\}$上线性无关。若$a\in S^m_{\rho,\delta}(U)$，$a|_C=0$，$\rho+\delta=1$，则存在$a_j\in S^{m+\delta}_{\rho,\delta}(U), j=1,\cdots,k$，使

$$a=\sum_{j=1}^{k}a_j\varphi_j. \tag{14}$$

证 由于(14)的右边是a_j的线性组合，故只须局部地寻求a_j，即：对U中任一固定点(x_0,θ_0)，在(x_0,θ_0)的某邻域中求出a_j。然后利用U上关于θ为正齐零次函数组成的单位分解，把局部确定的a_j并合而得全局所需的a_j。至于上述的单位分解，可如下构成。设$\{U_i\}$是U的开复盖列，每个U_i都是U的开锥子集。由对应于覆盖列$\{U_i\cap(R^n\times\rho^{N-1})\}$的通常的（即不必为$\theta$的正齐零次函数）单位分解$\{h_i(x,\theta)\}$，取$e_i(x,\theta)=h_i\left(x,\dfrac{\theta}{|\theta|}\right)$，即得所需的单位分解$\{e_i(x,\theta)\}$。若在每个$U_i$中已求得$a_j^{(i)}\in S^{m+\delta}_{\rho,\delta}(U_i)$，使在$U_i$上有$a=\sum\limits_{j=1}^{k}a_j^{(i)}\varphi_j$，则令

$$a_j(x,\theta)=\sum_i a_j^{(i)}(x,\theta)e_i(x,\theta),\quad (x,\theta)\in U$$

显然有$a_j \in S^{m+k}_{\rho,\delta}(U)$，且当$(x,\theta)\in U$时，

$$\sum_j a_j\varphi_j = \sum_j\left(\sum_i a_j^{(i)} e_i\right)\varphi_j = \sum_i e_i \sum_j a_j^{(i)}\varphi_j$$

$$= a\sum_i e_i = a$$

由于对 i 的和是局部有限的而对 j 的和是有限的，故可交换作和顺序。

现在局部地证明$a_j^{(i)}$的存在性。设$(x_0,\theta_0)\in U$，若$(x_0,\theta_0)\notin C$，则有某个k_0，$1\leqslant k_0\leqslant k$，使$\varphi_{k_0}(x_0,\theta_0)\neq 0$。由$\varphi_{k_0}$的连续性及正齐零次性，知$\varphi_{k_0}$在$(x_0,\theta_0)$的某个锥邻域$U_0$中不为零。于是可在$U_0$中取$a_j\equiv 0$，$j\neq k_0$，$a_{k_0}=\dfrac{a}{\varphi_{k_0}}$，即知(14)在$U_0$中成立。

若$(x_0,\theta_0)\in C$，因$\nabla\varphi_j(j=1,\cdots,k)$在$C$上线性无关，故可作自变量的剖分：$(x,\theta)=(x',x'',\theta',\theta'')$，其中

$$(x',\theta')\in \mathbf{R}^{n'}\times\mathbf{R}_{N'},\quad (x'',\theta'')\in\mathbf{R}^{n''}\times\mathbf{R}_{N''},$$

使$n'+N'=k$，且

$$W(x,\theta)\equiv\det\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i'},\ \frac{\partial\varphi_j}{\partial\theta_i'}\right),$$

在点(x_0,θ_0)不为零。注意到W的光滑性且关于θ为正齐-N'次函数，知W在(x_0,θ_0)的某个锥邻域U_0中恒不为零。

考虑映射f：$(x,\theta)\in U_0\to(y,\eta)\in V_0\subset\mathbf{R}^{k+n''}\times\mathbf{R}_{N''}$，其中$y=(y',y'')$，$y'=(\varphi_1(x,\theta),\cdots,\varphi_k(x,\theta))$，$y''=x''$，$\eta=\theta''$。易知$f$为由$U_0$到$V_0$的微分同胚，且对任何$t>0$，下图

$$
\begin{array}{ccc}
(x,\theta) & \xrightarrow{f} & (y,\eta) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(x,t\theta) & \xrightarrow{f} & (y,t\eta)
\end{array}
$$

为可换的。故V_0为$\boldsymbol{R}^{k+n''}\times\boldsymbol{R}_{N''}$中的锥域（关于$\eta$），且$f$映$C\cap U_0$为锥集$\Pi=\{(y,\eta)\in V_0;\ y'=0\}$。

记$b(y,\eta)=a_0f^{-1}$。由引理2知$b\in S^m_{\rho,\delta}(V_0)$；且由$a|_C=0$知$b(0,y'',\eta)=0$。故有

$$b(y,\eta)=b(y',y'',\eta)-b(0,y'',\eta)=\int_0^1\frac{d}{dt}b(ty',y'',\eta)dt$$

$$=\sum_{j=1}^k\left[\int_0^1\left(\frac{\partial b}{\partial y_j'}\right)(ty',y'',\eta)dt\right]y_j'$$

$$=\sum_{j=1}^k b_j(y,\eta)y_j', \tag{14'}$$

$$b_j(y,\eta)=\int_0^1\frac{\partial b}{\partial y_j'}(ty',y'',\eta)dt.$$

易知$b_j\in S^{m+\delta}_{\rho,\delta}(V_0)$，故$a_j=b_j\circ f\in S^{m+\delta}_{\rho,\delta}(U_0)$。由(14′)有：

$$a(x,\theta)=(b\circ f)(x,\theta)=\sum_{j=1}^k(b_j\circ f)(x,\theta)\cdot\varphi_j(x,\theta)$$

$$=\sum_{j=1}^k a_j(x,\theta)\varphi_j(x,\theta),\quad (x,\theta)\in U_0,$$

即局部地有(14)成立。这里用到引理2并涉及f^{-1}，所以必须假定其中的条件a)及c)之一成立。当φ_j仅为x的函数时，由f的具体构造知条件c)自动满足。

定理3 设φ为非退化位相函数，$a\in S^m_{\rho,\delta}(X\times\boldsymbol{R}_N)$，且或

者$\rho>\delta$，$\rho+\delta=1$，或者$\rho>\delta$且φ关于θ为线性的，则有：

1）若a在C_φ上无穷阶为零，则$A(x)\in C^\infty(X)$；

2）若在C_φ上$a=0$，则存在 $b\in S^{m-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(X\times\boldsymbol{R}_N)$，使对每个$u\in C_0^\infty(X)$，有$I_\varphi(au)=I_\varphi(bu)$。

证 记 $\varphi_j=\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}$，$j=1$，…，$N$。据假定知：或者$\varphi_j$不依赖于$\theta$，或者$\rho+\delta=1$。故由引理 3 得：当 $a|_{C_\varphi}=0$时，a 可表示为：

$$a=\sum_{j=1}^{N}a_j\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j},\quad a_j\in S^{m+\delta}_{\rho,\delta}(U).$$

这里$U=X\times\boldsymbol{R}_N$。由分部积分可得

$$I_\varphi(au)=\sum_{j=1}^{N}iI_\varphi\left(\frac{\partial a_j}{\partial\theta_j}u\right)=I_\varphi(bu),$$

$$b=i\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial a_j}{\partial\theta_j}.$$

因$\dfrac{\partial a_j}{\partial\theta_j}\in S^{m+\delta-\rho}_{\rho,\delta}$，故结论2）成立。

若C_φ上的点都是a的无穷阶零点，则也是b 的 无 穷 阶 零点。于是可重复应用结论2），即知结论1）成立。

3.2 Fourier 积分算子

本节扼要介绍Fourier积分算子的概念及简单性质，并 用以引出拟微分算子。这里只限于Euclid空间中的域上的 Fourier积分算子（局部理论），而不涉及一般流形上的情形（全 局

理论）。

3.2.1 基本概念

设X及Y分别是$\mathbf{R}^{n_x}$及$\mathbf{R}^{n_y}$中的域，n_x及n_y表示空间的维数，考虑如下的积分

$$(Au)(x)=\iint e^{i\varphi(x,y,\theta)}a(x,y,\theta)u(y)dyd\theta, \quad (1)$$

$$\forall u\in C_0^\infty(Y), \quad \forall x\in X.$$

其中φ为定义于$X\times Y\times\mathbf{R}_N$的位相函数，$a\in S^m_{\rho,\delta}(X\times Y\times\mathbf{R}_N)$，这里$X\times Y$相当于3.1.1定义1中的$X$，即$a$应满足估计式

$$|D_\theta^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma a(x,y,\theta)|$$
$$\leqslant C(\alpha,\beta,\gamma,K)(1+|\theta|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta+\gamma|},$$
$$\forall(x,y,\theta)\in K\times\mathbf{R}_N,$$

K为$X\times Y$中任一紧集。以后恒假定$\rho>0$，$\delta<1$。于是积分

$$(Au,v)=\iiint e^{i\varphi(x,y,\theta)}a(x,y,\theta)u(y)v(x)dxdyd\theta, \quad (2)$$

$$\forall u\in C_0^\infty(Y),\ v\in C_0^\infty(X)$$

为通常的振荡积分，而以a为振幅函数。

容易看出：对每个固定的$u(y)\in C_0^\infty(Y)$，式(2)确定一个广函$Au\in\mathscr{D}'(X)$，故可定义线性算子

$$A:\ C_0^\infty(Y)\rightarrow\mathscr{D}'(X). \quad (3)$$

定义1 由式(2)确定的线性算子A称为Fourier **积分算子**，并形式地把Au表示为(1)式，而称φ为其位相，a为其振幅。

Fourier积分算子通常简记为FIO。

由下式

$$(K_A,w)=\iiint e^{i\varphi(x,y,\theta)}a(x,y,\theta)w(x,y)dxdyd\theta, \quad (4)$$

$\forall w \in C_0^\infty(X\times Y)$

确定的广函$K_A\in\mathscr{D}'(X\times Y)$称为算子$A$的核。

特别当$w(x,y)=u(y)v(x)$时，显然有

$$(Au,v)=(K_A,uv),\forall u\in C_0^\infty(Y),\ v\in C_0^\infty(X)。\tag{5}$$

定理1 $a)$ $K\in C^\infty(R_\varphi)$

$$R_\varphi\equiv\{(x,y):\ |\varphi_\theta'(x,y,\theta)|\equiv|\nabla_\theta\varphi|\neq 0,\ (x,y,\theta)\in X\times Y\times(\boldsymbol{R}_N\setminus 0)\}$$

$b)$ 若在集

$$C_\varphi\equiv\{(x,y,\theta):\ |\varphi_\theta'(x,y,\theta)|\neq 0,\ (x,y,\theta)\in X\times Y\times(\boldsymbol{R}_N\setminus 0)\}$$

的某个锥邻域中$a\equiv 0$，则$K_A\in C^\infty(X\times Y)$。

这是3.1.3定理1及推论1的直接推论。

定义2 位相$\varphi(x,y,\theta)$若满足下列二条件：

$$|\varphi_{y,\theta}'(x,y,\theta)|\equiv|(\nabla_y\varphi,\nabla_\theta\varphi)|\neq 0,\ (x,y,\theta)\in X\times Y\times(\boldsymbol{R}_N\setminus 0),\tag{6}$$

$$|\varphi_{x\theta}'(x,y,\theta)|\neq 0,\quad (x,y,\theta)\in X\times Y\times(\boldsymbol{R}_N\setminus 0),\tag{7}$$

即称φ为**算子位相函数**。

定理2 若条件(6)成立，则算子(1)为由$C_0^\infty(Y)$到$C^\infty(X)$的连续线性映射。

证 由条件(6)知(1)是含参变量x的振荡积分，故

$$Au=\iint e^{i\varphi(x,y,\theta)}L_{y,\theta}^{l}[a(x,y,\theta)u(y)]dyd\theta。$$

仿照3.1.3定理1的证明，知有$Au\in C^\infty(X)$。

其次，设列$\{u_j(y)\}\subset\mathscr{D}(Y)$并按其中拓扑趋于零。容易建立估计式

$$|D_x^\gamma(e^{i\varphi(x,y,\theta)}L_{y,\theta}^{l}[a(x,y,\theta)u_j(y)])|$$

$$\leqslant C_j(\gamma, K_1)(1+|\theta|)^{m-ls+\delta|\gamma|},$$

$$\forall x \in K_1,\quad y \in K_2,\quad s=\min(\rho, 1-\delta),$$

其中K_1及K_2分别是X及Y中任意紧集，$l=l(r)$充分大，且可选择C_j使$C_j \to 0(j \to \infty)$。故$(Au_j)(x)$的各阶导数在K_1上一致地趋于零，即：Au_j在$C^\infty(X)$中趋于零。由此得A的连续性。A的线性是显然的。定理证毕。

现在定义(1)的**转置算子**${}^tA$如下：

$$({}^tAv)(y)=\iint e^{i\varphi(x,y,\theta)}a(x,y,\theta)v(x)dxd\theta,$$

$$\forall v \in C_0^\infty(X). \tag{8}$$

显然，${}^tA$为映$C_0^\infty(X)$到$\mathscr{D}'(Y)$中的FIO，且有：

$$(Au,v)=(K_A,uv)=(u,{}^tAv), \tag{9}$$

$$\forall u \in C_0^\infty(Y),\ v \in C_0^\infty(X)$$

定理3 若条件(7)成立，则算子A可延拓为连续性映射：$\mathscr{E}'(Y) \to \mathscr{D}'(X)$。

证 当$u \in C_0^\infty(Y)$，由(9)知有

$$(Au,v)=(u,{}^tAv),\quad \forall v \in C_0^\infty(X). \tag{9'}$$

当$u \in \mathscr{E}'(Y)$时，(9′)一般不成立，因Au及$(u,{}^tAv)$可能都无意义.但若(7)成立，则可应用定理2于${}^tA$,而得${}^tAv \in C^\infty(Y)$，这时(9′)的右边有意义。于是可用(9′)的右边定义(Au, v)，即定义

$$(Au,v)=(u,{}^tAv),\quad u \in \mathscr{E}'(Y),\quad v \in C_0^\infty(X), \tag{10}$$

故Au为$C_0^\infty(X)$上的线性泛函。为证$Au \in \mathscr{D}'(X)$，令$v_j(x) \to 0$（按$\mathscr{D}(X)$中的收敛定义）。据定理2知${}^tAv_j \to 0$（按$C^\infty(Y)$中拓扑）。故

$$(Au,v_j)=(u,{}^tAv_j) \to 0.$$

算子A的连续性可类似地证明。

推论1 设A为具算子位相φ的 FIO，则A为由$C_0^\infty(Y)$到$C^\infty(X)$的连续线性映射，并可延拓为由$\mathscr{E}'(Y)$到$\mathscr{D}'(X)$的连续性映射。

3.2.2 奇台的变化

设A为具算子位相φ的FIO，于是A映$\mathscr{E}'(Y)$于$\mathscr{D}'(X)$中。现在研究紧台广函的奇台在A作用后出现的变化。

为了叙述的方便，先引进一种记法。设X及Y为任二集合，S为$X\times Y$的子集，K为Y的子集，记

$$S\circ K\equiv\{x;\ x\in X,\ \exists\, y\in K,\text{使}(x,y)\in S\}.$$

若用π_1及π_2分别表示$X\times Y$到X及Y的自然投影，则显然有

$$S\circ K=\pi_1[\pi_2^{-1}(K)\cap S].$$

定理4 设A为具算子位相的FIO，$u\in\mathscr{E}'(Y)$，则成立如下的包含关系：

$$\text{sing supp}\,Au\subset S_\varphi\circ\text{sing supp}\ u;\tag{11}$$

$$S_\varphi\equiv(X\times Y)\setminus R_\varphi\equiv\{(x,y);\ \exists\,\theta\in \boldsymbol{R}_N\setminus 0,$$
$$\text{使}|\varphi_\theta'(x,y,\theta)|=0\}.$$

证 首先指出，为证明(11)，只须证明如下的较弱结论：

$$\text{sing supp}\,Au\subset S_\varphi\circ\text{supp}\,u,\tag{11'}$$

事实上，设(11')成立。取sing supp$u$的任一邻域U，选$\psi(y)\in C_0^\infty(U)$，使ψ在u的奇台上取值1。令$u_1=(1-\psi)u,u_2=\psi u$。显然有$u_1\in C_0^\infty(Y)$。故由推论1知$Au_1\in C^\infty(X)$。于是

$$\text{sing supp}\,Au=\text{sing supp}\,A(u_1+u_2)$$
$$\subset(\text{sing supp}\,Au_1)\cup\text{sing supp}\,Au_2=\text{sing supp}\,Au_2.$$

注意到supp$u_2\subset U$，并对u_2应用(11')，即得

$$\text{sing supp}\,Au\subset\text{sing supp}\,Au_2\subset S_\varphi\circ\text{supp}\,u_2\subset S_\varphi\circ U.$$

由于U是$\operatorname{sing\,supp} u$的任何邻域，故(11)成立。剩下须证明(11′)。记$K=\operatorname{supp} u$，设K'是X中不与$S_\varphi\circ K$相交的任一紧集，则$K'\times K\subset R_\varphi$。易知$R_\varphi$为开集，故存在开邻域$\Omega\supset K$及$\Omega'\supset K'$，使$\Omega'\times\Omega\subset R_\varphi$。只须核验$Au\in C^\infty(\Omega')$。为此可注意$K_A\in C^\infty(\Omega'\times\Omega)$，于是对每个$\psi(x)\in C_0^\infty(\Omega')$，有：

$$(Au,\psi)=(u,{}^tA\psi)=\left(u,\int K_A(x,y)\psi(x)dx\right)$$

$$=((u,K_A)_y,\psi)_x=\int f(x)\psi(x)dx$$

$$f(x)=(u,K_A)_y\in C^\infty(\Omega'),$$

故确有$Au\in C^\infty(\Omega')$。由于K'是$X\setminus(S_\varphi\circ K)$中任意紧集，知(11′)成立。定理证毕。

推论2 设A是具算子位相的FIO，则成立如下的包含关系。

$$\operatorname{sing\,supp} Au\subset(\operatorname{sing\,supp} K_A)\circ\operatorname{sing\,supp} u,$$
$$\forall u\in\mathscr{E}'(Y).$$

证 在定理4的证明中，换S_φ为$\operatorname{sing\,supp} K_A$，进行同样推导，即得所需包含关系。

例1 考虑初值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta f,\quad t>0,\quad x\in \boldsymbol{R}^n; \tag{12}$$

$$f|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=0}=u(x).$$

暂假定$u\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$。利用Fourier变换，容易求出这个问题的解为

$$f(x,t)=\iint e^{i(x-y,\xi)}\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}u(y)dyd\xi$$

取$\tau(\xi)\in C_0^\infty(R_n)$，且当$|\xi|<1$时$\tau|\xi|=1$。上式可改写为

$$f(x,t)=\iint e^{i[(x-y,\xi)+t|\xi|]}[1-\tau(\xi)]\frac{1}{2i|\xi|}u(y)dyd\xi$$

$$+\iint e^{i[(x-y,\xi)-t|\xi|]}[1-\tau(\xi)]\frac{1}{2i|\xi|}u(y)dyd\xi$$

$$+\iint e^{i(x-y,\xi)}\frac{\tau(\xi)\sin t|\xi|}{|\xi|}u(y)dyd\xi$$

$$\equiv A_+u+A_-u+Ru.$$

其中$A_\pm$分别为具位相 $\varphi_\pm(x,\ y,\ \xi)=(x-y,\ \xi)\pm t|\xi|$及振幅 $a_\pm(x,y,\ \xi)=\pm[1-\tau(\xi)]\frac{1}{2i|\xi|}\in S^{-1}$的FIO，而 R则为具光滑核$r(x,\ y)=\int e^{i(x-y,\xi)}\tau(\xi)\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}d\xi$的积分算子。这些函数都含参变量$t$。

容易验证φ_+及φ_-都是算子位相函数，故A_+及A_-都可延拓为连续映射：$\mathscr{E}'(R^n)\to\mathscr{D}'(R^n)$；而$R$作为具 C^∞ 光滑核的积分算子，显然是连续映射：$\mathscr{E}'(R^n)\to C^\infty(R^n)$，且光滑地依赖于参变量$t$。由此可知，若初值问题(12)中的初值 $u\in\mathscr{E}'(R^n)$，则(12)的广义解可表示为：

$$f=A_+u+A_-u+Ru,$$

于是可以考察u的奇性如何传播于f的问题。由于$Ru\in C^\infty$，故这一项对f不产生奇性。显然，A_+及A_-的作用相似。为简单起见，下面只讨论$f_+\equiv A_+u$的奇性。

因 $(\varphi_+)'_\xi=x-y+t\frac{\xi}{|\xi|}$，故有

$$C_{\varphi_+}=\left\{(t,x,y,\xi):\ y-x=\frac{t\xi}{|\xi|}\right\},$$

$$S_{\varphi_+^*} = \{(t,x,y);\ |x-y|^2 = t^2\}.$$

据定理 4 知，f_+随之f的奇性应位于集

$$\{(t,x);\ y \in \text{sing supp} u,\ |x-y|^2 = t^2\}$$

中。这正是经典结果：奇性以速率a（这里取 $a=1$）沿特征锥$|x-y|^2 = t^2$传播。特别地，基本解（$u=\delta(x)$的情形）的奇性位于锥$|x|^2 = t^2$上。

附带指出，位相$\varphi_\pm = (x-y,\xi) \pm t|\xi|$ 在$|\xi| = 0$不可微，这正是在位相定义中只要求$\varphi \in C^\infty(X \times Y \times (\boldsymbol{R}_N \setminus 0))$的原因.

3.2.3 拟微分算子

定义3 设$n_x = n_y = N = n$，$X = Y$，$a(x,y,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times X \times \boldsymbol{R}_n)$，则具位相$\varphi = (x-y,\xi)$ 的FIO称为**m阶（ρ,δ）型的拟微分算子**（以后简记拟微分算子为ψDO)，其全体记为$L^m_{\rho,\delta}(X)$或$L^m_{\rho,\delta}$；特别地，$L^m_{1,0}$记为L^m，并约定$L^{-\infty} = \bigcap\limits_m L^m$.

例2 设$P(x,D) = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$，$a_\alpha(x) \in C^\infty(X)$，如本章开始一段所述，对每个$u(x) \in C_0^\infty(X)$，有

$$P(x,D)u(x) = \iint e^{i(x-y,\xi)} P(x,\xi) u(y) dy d\xi,$$

故$P(x,D) \in L^m(X)$。函数$P(x,\xi)$称为线性偏微分算子$P(x,D)$的(全)符征。

例3 设R是具C^∞光滑核$r(x,y)$的积分算子，即对每个$u \in C_0^\infty(X)$，有

$$Ru = \int r(x,y) u(y) dy, \qquad r \in C^\infty(X \times X),$$

则$R \in L^{-\infty}$。

事实上，取$\tau(\xi) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}_n)$，$\tau(\xi) \geqslant 0$，$\int \tau(\xi) d\xi = 1$，则有

$$Ru=\iint e^{i(x-y,\xi)}[e^{-i(x-y,\xi)}\tau(\xi)r(x,y)]u(y)dyd\xi$$

记$a(x,y,\xi)=e^{-i(x-y,\xi)}\tau(\xi)r(x,y)$，易知$a\in S^{-\infty}$，故$R\in L^{-\infty}$。

反之，容易证明$L^{-\infty}(X)$中的每个ψDO可表为具C^∞光滑核的积分算子。

例 3 表明一个ψDO的振幅不是唯一的，因τ不唯一。

例4 考虑卷积算子

$$Gu\equiv g*u=\int g(x-y)u(y)dy,\quad \forall u\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n),$$

其中 $g\in S^{-\infty}(\boldsymbol{R}^n)$. 虽然这个算子可作为例 3 的特殊情形，但它可引出另一种有用表达式

$$Gu=\int e^{i(x,\xi)}\widehat{g*u}(\xi)d\xi=\int e^{i(x,\xi)}\widehat{g}(\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi$$

$$=\int e^{i(x-y,\xi)}\widehat{g}(\xi)u(y)dyd\xi,$$

由此知$G\in L^{-\infty}(\boldsymbol{R}^n)$。

显然，$\varphi=(x-y,\xi)$是非退化的位相函数，故可应用3.1.3中定理 3 及本节的定理 1 与 4，而得下面的结果。

定理5 设A是由下式给出的ψDO。

$$(Au)(x)=\iint e^{i(x-y,\xi)}a(x,y,\xi)u(y)dyd\xi,\tag{13}$$

记A的广函核为K_A。引进**对角集**

$$\triangle\equiv\{(x,y);\ x=y,\ (x,y)\in X\times X\}$$

则有 a) $K_A\in C^\infty((X\times X)\setminus\triangle)$;

b) 算子A确定如下的连续线性映射：

$$A:\ C_0^\infty(X)\to C^\infty(X);\tag{14}$$

$$A:\ \mathscr{E}'(X)\to\mathscr{D}'(X);\tag{15}$$

且当$u\in\mathscr{E}'(X)$时，成立如下的**拟局部性**.

$$\text{sing supp}Au\subset\text{sing supp}u. \qquad (16)$$

c) 若振幅$a(x, y, \xi)$在对角集△上为零，且$\rho>\delta$，则在(13)中可换$a(x,y,\xi)$为$b(x,y,\xi)\in S_{\rho,\delta}^{m-(\rho-\delta)}(X\times X\times R_n)$;

d) 若对角集△上每一点都是a的无穷阶零点，则$K_A\in C^\infty(X\times X)$，且算子$A$映$\mathscr{E}'(X)$到$C^\infty(X)$中.

注1 线性微分算子$A(x,D)$具**局部性**

$$\text{supp}Au\subset\text{supp}u, \quad \forall u\in C_0^\infty(X). \qquad (17)$$

拟微分算子一般不具备局部性，例如，对具光滑核的积分算子（例3），当且仅当它的核恒等于零时，才有局部性(17)。Peetre曾证明（见Math.Scand. 8(1960)116-120)，由$C^\infty(X)$到$C^k(X)$的线性映射是具C^k系数的线性微分算子的充要条件是：它满足局部性(17)。

3.3 拟微分算子代数

3.3.1 适拟微分算子

一般说来，两个ψDO不能相乘（合成），因为值域C^∞或$\mathscr{D}'$超出相应的定义域C_0^∞或$\mathscr{E}'$.

下面将要引进的适拟微分算子类具有很好性质：它们把C_0^∞、$\mathscr{E}'$等空间映到其自身。这样，就可以在适拟微分算子类中引进乘法（合成），使它们构成代数系统；而且，任一个ψDO可以分解成一个适拟微分算子与一个具光滑核的积分算子之和，从而在mod$(L^{-\infty})$的意义下，拟微分算子的同余类构成一个代数.

设G是乘积空间$X\times X$的子集，π_1及π_2分别为$X\times X$到第

一及第二个因子空间的典则投影，即，$\pi_1(x,y)=x$，$\pi_2(x,y)=y$，$\forall(x,y)\in X\times X$。若对$X$中任一紧集$K$，集 $\pi_1^{-1}(K)\cap G$或为紧集，或为空集，且$\pi_2^{-1}(K)\cap G$ 具类似情况，则称G为$X\times X$的适子集，简称**适集**。

定义1 设A为ψDO，其核为K_A。若$\operatorname{supp}K_A$为 $X\times X$ 的适集，则称A为具适合的 ψDO，简称为适 ψDO (properly supported pseudo-differential operator)。

由显见的关系式

$$K_{{}^tA}(x,y)=K_A(y,x).$$

易知若A为适ψDO，则${}^tA$也是适ψDO.

定理1 若A为适ψDO，则A确定连续线性映射：

$$A:C_0^\infty(X)\to C_0^\infty(X), \tag{1}$$

并可延拓为下列连续线性映射：

$$A:\ \mathscr{E}'(X)\to\mathscr{E}'(X); \tag{2}$$

$$A:\ C^\infty(X)\to C^\infty(X); \tag{3}$$

$$A:\ \mathscr{D}'(X)\to\mathscr{D}'(X). \tag{4}$$

证 设$u(y)\in C_0^\infty(X)$。上节已证明：A确定连续线性映射：$C_0^\infty(X)\to C^\infty(X)$。若能证明$Au$具紧台，则(1)成立。为此，证明包含关系

$$\operatorname{supp}Au\subset(\operatorname{supp}K_A)\circ\operatorname{supp}u. \tag{5}$$

事实上，若$v\in C_0^\infty(X')$，$X'=X\diagdown(\operatorname{supp}K_A\circ\operatorname{supp}u)$，则

$$(\operatorname{supp}v\times\operatorname{supp}u)\cap\operatorname{supp}K_A=\varnothing$$

故有

$$(Au,v)=(K_A,uv)=0,\ \forall u\in C_0^\infty(X),\ v\in C_0^\infty(X').$$

这表明Au在X'中恒等于零，而得包含关系(5)。因$\operatorname{supp}K_A$为适集，$\operatorname{supp}u$为紧集，据适集的定义知$\operatorname{supp}K_A\cap\pi_2^{-1}(\operatorname{supp}u)$

为紧集。其次，由于

$$\text{supp}K_A\circ\text{supp}u=\pi_1[\text{supp}K_A\cap\pi_2^{-1}(\text{supp}u)]$$

故$\text{supp}K_A\circ\text{supp}u$作为紧集在连续映射$\pi_1$的作用下的象集，亦为紧集。由(5)知$\text{supp}Au$为紧集，即$Au\in C_0^\infty(X)$，随之(1)成立。

必须注意，$\text{supp}K_A\cap\pi_2^{-1}(\text{supp}u)$可以是空集。这时(5)表明$\text{supp}Au$为空集，即$Au$是$C_0^\infty(X)$中零元。

至于映射(1)的连续性，不难由(5)及映射A：$C_0^\infty(X)\to C^\infty(X)$的连续性推出。

今设$u\in\mathscr{D}'(X)$。因${}^tA$也是适ψDO，故${}^tA$确定连续线性映射：$C_0^\infty(X)\to C_0^\infty(X)$。于是可如下定义$Au$：

$$(Au,v)=(u,{}^tAv),\quad\forall v\in C_0^\infty(X)。$$

易知$Au\in\mathscr{D}'(X)$，故(4)成立，且相应的映射在弱意义下连续。

为证(3)，设$u\in C^\infty(X)$。由已证得的(4)，知$Au\in\mathscr{D}'(X)$。今证明实际有$Au\in C^\infty(X)$。任意取$\omega\Subset X$，即ω为X的相对紧开子集。对每个$v\in C_0^\infty(\omega)$，有

$$\text{supp}\,{}^tAv\subset\text{supp}K_{{}^tA}\circ\text{supp}v\subset\text{supp}K_{{}^tA}\circ\overline{\omega}\equiv K$$

K显然为紧集。取$\psi(y)\in C_0^\infty(X)$，使在K上$\psi\equiv1$，则

$$(Au,v)=(u,{}^tAv)=(\psi u,{}^tAv)=(A(\psi u),v),\quad\forall v\in C_0^\infty(\omega)$$

即在ω中有$Au=A(\psi u)$。但$\psi u\in C_0^\infty(X)$，故$A(\psi u)\in C_0^\infty(X)$，特别有$A(\psi u)\in C^\infty(\omega)$，即$Au\in C^\infty(\omega)$。由$\omega$的任意性知$Au\in C^\infty(X)$，故(3)成立。剩下须证相应映射的连续性。设$\{u_j\}$是$C^\infty(X)$中收敛于零的任一函数列。今证$Au_j(x)$在$C^\infty(X)$中收敛于零。为此取任意紧集$K_1\subset X$，记$K_2=\text{supp}K_{{}^tA}\circ K_1$。于是可取$\psi(y)\in C_0^\infty(X)$，使$\psi$在$K_2$的某个邻域中恒等于1. 如上所证，当$x\in K_1$时，有$(Au_j)(x)=[A(\psi u_j)](x)$. 因$\psi(y)u_j(y)$在$C_0^\infty(X)$中收敛于零，故$A(\psi u_j)$在$C_0^\infty(X)$中收敛于零，即

$(Au_j)(x)$ 的各阶导数在K_1上一致收敛于零。由于K_1是X的任一紧集，知Au_j在$C^\infty(X)$中收敛于零。

最后，因C^∞的对偶空间是$\mathscr{E}'$，利用转置算子^tA，仿照(4)可得映射(2)及其连续性。

定义2 设$a\in S^m_{\rho,\delta}(X\times X\times \boldsymbol{R}_n)$，记$\mathrm{supp}_{x,y}a$为$\mathrm{supp}\,a$在$X\times X$上的投影的闭包。若$\mathrm{supp}_{x,y}a$为适集，则称$a$具适台。

由显然的包含关系$\mathrm{supp}K_A\subset\mathrm{supp}_{x,y}a$知：当$a$具适台时，以$a$为振幅的ψDO必为适ψDO。逆命题依如下意义成立。

定理2 若A为适ψDO，$A\in L^m_{\rho,\delta}(X)$，则$A$有具适台的振幅$a\in S^m_{\rho,\delta}(X\times X\times\boldsymbol{R}_n)$。

证 取$\tau(x,y)\in C^\infty(X\times X)$，使在$\mathrm{supp}K_A$的某个邻域中$\tau\equiv1$，且$\tau$具适台。若$a\in S^m_{\rho,\delta}(X\times X\times\boldsymbol{R}_n)$为$A$的任一振幅（不必具适台），令$a'=\tau a$，则$a'$必为$A$的具适台的振幅，且$a'\in S^m_{\rho,\delta}$。事实上，设$A'$为以$a'$作振幅的ψDO，简记为$A'=O_p(a')$。显然有$K_{A'}=\tau K_A$，于是

$$
\begin{aligned}
(A'u,v)&=(K_{A'},uv)=(\tau K_A,uv)\\
&=(K_A,uv)=(Au,v)\\
&\forall u\in\mathscr{D}'(X),\ v\in C_0^\infty(X),
\end{aligned}
$$

故$A'u=Au$，即$A'=A$，随之$A=O_p(a')$。

至于满足上述要求的$\tau(x,y)$，可如下构造。设$\{e_j(y)\}$为X上的单位分解。记$K_j=\mathrm{supp}K_A\circ\mathrm{supp}\,e_j$，则$K_j$为$X$中紧集。故可取$f_j(x)\in C_0^\infty(X)$，使$f_j$在$K_j$的某邻域中恒等于1。记$w_1(x,y)=\sum\limits_j e_j(y)f_j(x)$。容易验证$w_1\in C^\infty(X\times X)$，且$w_1$在$\mathrm{supp}K_A$的某个邻域中恒等于1，并对每个紧集$K\subset X$，使$(\pi_2^{-1}K)\cap\mathrm{supp}\,w_1$为紧集。类似地，记$K_j'=\pi_2[(\pi_1^{-1}\cdot\mathrm{supp}\,e_j)\cap\mathrm{supp}K_A]$，取$g_j(y)\in C_0^\infty(X)$，且在$K_j'$的某个邻域

中$g_j\equiv 1$。令$w_2(x,y)=\sum e_j(x)g_j(y)$，则 w_2在 $\operatorname{supp}K_A$的某个邻域中恒等于 1，且对每个紧集 $K\subset X$，使 $(\pi_1^{-1}K)\cap\operatorname{supp}w_2$为紧集。则$\tau(x,y)=w_1(x,y)w_2(x,y)$即为所求。

定理3 每个拟微分算子A可表为 $A=A_1+A_2$，这里A_1为适ψDO，而A_2的核$K_{A_2}\in C^\infty(X\times X)$。

证 从定理 2 的证明过程可知，对$X\times X$的每个适集G，存在具适台的$\tau(x,y)\in C^\infty(X\times X)$，使在$G$的某个邻域中$\tau\equiv 1$（只须把那里的$\operatorname{supp}K_A$换为$G$，则相应的$\tau$即为所需）。

特别取G为对角集△，记 $a_1=\tau a$，$a_2=(1-\tau)a$，$A_1=O_p(a_1)$，$A_2=O_p(a_2)$，则 $A=A_1+A_2$。据定理 2 知A_1为适ψDO；由 3.2.3 定理 5 中d）知$K_{A_2}\in C^\infty(X\times X)$。

定理4 拟微分算子A为适ψDO的充要条件是下面的两个要求：

a）对任一紧集$K\subset X$，存在紧集$K_1\subset X$，使由 $\operatorname{supp}u\subset K$，有$\operatorname{supp}Au\subset K_1$；

b）对任一紧集$K_1\subset X$，存在紧集$K\subset X$，使由 $\operatorname{supp}v\subset K_1$，有$\operatorname{supp}{}^tAv\subset K$。

证 必要性 由(5)知a)成立；又由A为适ψDO知${}^tA$为适ψDO，故b)也成立。

充分性 据定理3知，不失一般性，只须对$K_A\in C^\infty(X\times X)$的情形进行讨论。

设K为X中任一紧集，K_1为条件a）中所述相应紧集。今证明

$$\pi_2^{-1}(K)\cap\operatorname{supp}K_A\subset K_1\times K \tag{6}$$

事实上，对任一个$w(x,y)\in C_0^\infty[K\times(X\setminus K_1)]$，可视 w为以 x 作参变元而以y作变元的函数，记为$w_x(y)$，则$w_x(y)\in C_0^\infty(K)$，

由条件a)知

$$F(x)\equiv\int K_A(x,y)w(x,y)dy$$

$$\equiv\int K_A(x,y)w_x(y)dy\equiv Aw_x(y)\in C_0^\infty(K_1)$$

记$K_1'=\pi_1(\operatorname{supp}w)$，显然有$K_1'\cap K_1=\varnothing$，于是

$$(K_A,w)=\iint\limits_{K_1'\times K}K_A(x,y)w(x,y)dxdy$$

$$=\int\limits_{K_1'}\left(\int\limits_K K_A(x,y)w_x(y)dy\right)dx=\int\limits_{K_1'}F(x)dx=0,$$

故包含关系(6)成立，随之$\pi_2^{-1}(K)\cap\operatorname{supp}K_A$为紧集。利用条件$b$)，同理可证：对任一紧集$K\subset X$，集$\pi_1^{-1}(K)\cap\operatorname{supp}K_A$为紧集。故$\operatorname{supp}K_A$为适集，随之$A$为适ψDO。

3.3.2 适拟微分算子的符征

如本章开端所述，线性偏微分算子$P(x,D)$的符征为$P(x,\xi)$。显然有

$$P(x,\xi)=e^{-i(x,\xi)}P(x,D)e^{i(x,\xi)}$$

这个表达式启示我们，可如下地定义适拟微分算子的符征。

定义3 设A为适ψDO，称函数

$$\sigma_A(x,\xi)=e^{-i(x,\xi)}Ae^{i(y,\xi)}$$

$$\equiv e^{-i(x,\xi)}\iint e^{i(x-y,\theta)}a(x,y,\theta)e^{i(y,\xi)}dyd\theta \quad (7)$$

为A的符征(或全符征)。

命题1 设A为适ψDO，则$\sigma_A(x,\xi)\in C^\infty(X\times R_n)$，且对每个$u\in C_0^\infty(X)$，有

$$(Au)(x)=\int\left[\int e^{i(x-y,\xi)}\sigma_A(x,\xi)u(y)dy\right]d\xi$$

$$=\int e^{i(x,\xi)}\sigma_A(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \qquad (8)$$

证 记$f(x,\xi)=A(e^{i(y,\xi)})$，须证 $f\in C^\infty(X\times \boldsymbol{R}_n)$。首先注意，在$C^\infty(X)$的拓扑意义下有

$$e^{i(y,\xi+\Delta\xi)}\to e^{i(y,\xi)} \quad (\xi\text{固定，}\Delta\xi\to 0)$$

因A为适ψDO，据定理1知按$C^\infty(X)$中拓扑有：

$$f(x,\xi+\Delta\xi)\to f(x,\xi) \qquad (\xi\text{固定},\Delta\xi\to 0),$$

故对每个$\alpha\in N^n$，有$D_x^\alpha f(x,\xi)\in C(X\times \boldsymbol{R}_n)$。

同样，依$C^\infty(X)$中拓扑有

$$[f(x,\xi+\Delta\xi_j)-f(x,\xi)]\frac{-i}{\Delta\xi_j}\to D_{\xi_j}f(x,\xi)$$

$$(\xi\text{固定，}\Delta\xi_j\to 0)$$

且$D_x^\alpha D_{\xi_j}f\in C(X\times \boldsymbol{R}_n)$。依此类推，知对任何指标组$\alpha$及$\beta$，有$D_x^\alpha D_\xi^\beta f\in C(X\times \boldsymbol{R}_n)$，故 $f\in C^\infty(X\times \boldsymbol{R}_n)$。于是 $\sigma_A(x,\xi)=e^{-i(x,\xi)}f(x,\xi)\in C^\infty(X\times \boldsymbol{R}_n)$。

现在证明式(8)。由3.1.2式(3)知

$$Au=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\tau(\varepsilon\theta)e^{i(x-y,\theta)}a(x,y,\theta)u(y)dyd\theta$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{i(x-y,\theta)}\left[\tau(\varepsilon\theta)a(x,y,\theta)\int e^{i(y,\xi)}\hat{u}(\xi)d\xi\right]dyd\theta$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint e^{i(x-y,\theta)}\tau(\varepsilon\theta)a(x,y,\theta)e^{i(y,\xi)}dyd\theta\,\hat{u}(\xi)d\xi.$$

记

$$P_\varepsilon(x,\xi)=\iint e^{i(x-y,\theta)}\tau(\varepsilon\theta)a(x,y,\theta)e^{i(y,\xi)}dyd\theta,$$

有

$$Au=\lim_{\varepsilon\to 0}\int P_\varepsilon(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi,$$

容易得到估计：

$$\begin{aligned}&|P_\varepsilon(x,\xi)|\\&=\left|\iint e^{i(x-y,\theta)}L^l_{y,\theta}[\tau(\varepsilon\theta)a(x,y,\theta)e^{i(y,\xi)}]dyd\theta\right|\\&\leqslant C(1+|\xi|)^l\end{aligned}$$

且常数C仅依赖于$\mathrm{supp}\,u$，而与ε无关。由这个估式及$\hat{u}(\xi)$的急降性知有

$$\begin{aligned}Au&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int P_\varepsilon(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi=\int\lim_{\varepsilon\to 0}P_\varepsilon(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi\\&=\int\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{i(x-y,\theta)}\tau(\varepsilon\theta)a(x,y,\theta)\right.\\&\qquad\left.\cdot e^{i(y,\xi)}dyd\theta\right]\hat{u}(\xi)d\xi\\&=\int A(e^{i(y,\xi)})\hat{u}(\xi)d\xi=\int e^{i(x,\xi)}\sigma_A(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi\\&=\int\left[\int e^{i(x-y,\xi)}\sigma_A(x,\xi)u(y)dy\right]d\xi\end{aligned}$$

故(8)式成立。

注1 以后将证明，当$\rho>\delta$时，$\sigma_A\in S^m_{\rho,\delta}$. 于是(8)中的累次积分可视作振荡积分，而$\sigma_A$为其振幅(具不含$y$的形式)。

注2 由(7)及(8)知，σ_A由适拟微分算子A所唯一确定，并且σ_A对应于唯一的A，它以σ_A为符征，且为适 ψDO。以后将进一步证明，对每个$b(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(X\times \boldsymbol{R}_n)$，$\rho>\delta$，存在适拟微分算子$B\in L^m_{\rho,\delta}(X)$，使$\sigma_B(x,\xi)\equiv b(x,\xi)(\bmod S^{-\infty})$。

定义3′ 设 $A\in L^m_{\rho,\delta}(X)$，$A$不必是适 ψDO。若$A_1$为适 ψDO，且使$A-A_1\in L^{-\infty}(X)$，则称$\sigma_{A_1}(x,\xi)$为$A$的符征。

由定理3及3.2.3例3知定义3′中的A_1存在，但非唯一的，

因而A的符征σ_A也不是唯一的。容易证明，A的任二符征相差函数$r(x,\xi)\in S^{-\infty}(X\times \boldsymbol{R}^n)$。事实上，设$A-A_j\in L^{-\infty}(X)$，$A_j$为适ψDO，$j=1, 2$，则 $R=A_1-A_2\in L^{-\infty}(X)$，且$R$为适ψDO。于是核$K_R(x,y)$为具适合的$C^\infty$函数。故有：

$$\sigma_{A_1}(x,\xi)-\sigma_{A_2}(x,\xi)=e^{-i(x\cdot\xi)}\int K_R(x,y)e^{i(y\cdot\xi)}dy \tag{9}$$

且对每个紧集$K\subset X$，当$x\in K$时，$K_R(x, y)$作为y的函数属于$C_0^\infty(X)$。故(9)的右边作为C_0^∞中函数的Fourier 变换而关于ξ急降。由此知有

$$\sigma_{A_1}(x,\xi)-\sigma_{A_2}(x,\xi)\in S^{-\infty}(x,\xi)$$

定义4 设$A\in L^m_{\rho,\delta}(X)$，$\sigma_A(x,\xi)$为$A$的全符征。若

$$\lim_{t\to\infty}\sigma_A(x,t\xi)t^{-m}\equiv\sigma_m(x,\xi)$$

存在，即称$\sigma_m(x,\xi)$为A的**主符征**。若点$(x^0,\xi^0)\in X\times(\boldsymbol{R}_n\setminus 0)$使

$$\sigma_m(x^0,\xi^0)=0,$$

即称(x^0,ξ^0)为A的**特征点**。

易知$\sigma_m(x, \xi)$关于ξ是正齐m次的。故A的特征点集组成$X\times(\boldsymbol{R}_n\setminus 0)$中的闭锥集，记为

$$\mathrm{Char}(A)\equiv\{(x,\xi):\sigma_m(x,\xi)=0,\ (x,\xi)\in X\times(\boldsymbol{R}_n\setminus 0)\}.$$

3.3.3. $S^m_{\rho,\delta}$中的渐近展式

定义5 设$a(x,\theta)\in C^\infty(X\times\boldsymbol{R}_n)$。若有列$a_j(x,\xi)\subset S^{m_j}_{\rho,\delta}$，$j=1, 2, \cdots$，当$j\to\infty$时，$m_j\to-\infty$，且对每个整数$r\geqslant 2$，有

$$a(x,\theta)-\sum_{j=1}^{r-1}a_j(x,\theta)\in S^{\overline{m}_r}_{\rho,\delta}(X\times\boldsymbol{R}_n),\ \overline{m}_r=\max_{j\geqslant r}m_j,$$

即称 a 有渐近展式

$$a(x,\theta)\sim\sum_{j=1}^{\infty}a_j(x,\theta).$$

容易由定义直接验证渐近展式的下列性质：

1）若$a\sim\sum_j a_j$，$b\sim\sum_j a_j$，则$a-b\in S^{-\infty}$；反之，若 $a\sim\sum_j a_j$，$a-b\in S^{-\infty}$，则$b\sim\sum_j a_j$。

2）若$a\sim\sum_j a_j$，则 $a\in S^{\bar{m}_1}_{\rho,\delta}$。

3）若$a\sim\sum_j a_j$，设$P(x,\xi,D_x,D_\xi)$是系数属$S^{+\infty}_{\rho,\delta}(X\times R_n)$的有限阶线性微分算子，则$Pa\sim\sum_j Pa_j$。

4）若$a\sim\sum_j a_j$，$a_j\sim\sum_k a_{jk}$，则$a\sim\sum_{j,k}a_{jk}$。

5）若$a\sim\sum_j a_j$，设映射 J：$j=j(k)(k=1,2,\cdots)$ 是正整数集到其自身的双射，记$b_k=a_{j(k)}$，则 $a\sim\sum_k b_k$。

6）设$a\sim\sum_j a_j$。记$b_k=a_{r_{k-1}}+\cdots+a_{r_k}$，$r_k>r_{k-1}\geqslant1$，$k=2,3,\cdots$，则$a\sim\sum_k b_k$。

7）设$a\sim\sum_j a_j$。若$\psi(\xi)\in C^\infty(R_n)$且 $1-\psi\in C_0^\infty(R_n)$，则

$a \sim \sum_j \psi a_j$。

定理5 给定 $a_j \in S^{m_j}_{\rho,\delta}(X \times R_n)$，$j=1,2,\cdots$，$m_j \to -\infty$ $(j \to \infty)$，则存在$a(x,\xi)$，使$a \sim \sum_j a_j$。

证 不失一般性，可认为$m_1 > m_2 > \cdots$，否则由条件 $m_j \to -\infty$，可合并第一项及随后的有限多项，使剩下的各项所对应的阶m_j都小于m_1，记合并而得的项为 b_1；对剩下的项作同样的处理，可依次得到b_1，$b_2, \cdots$，$b_k, \cdots$，$b_k \in S^{m'_k}_{\rho,\delta}$，且 $m'_{k+1} < m'_k$，$k=1,2,\cdots$。若能证明 $a \sim \sum_k b_k$，由性质4)及5)知 $a \sim \sum_j a_j$。

其次，还须证明一个预备性的结果。设$\{X_l\}$是X中的一列相对紧开集，使$\overline{X}_l \subset X_{l+1}$，$l=1,2,\cdots$，且$\bigcup_l X_l = X$。设$\psi(\theta) \in C^\infty(R_n)$，当$|\theta| \leqslant \frac{1}{2}$时，$\psi$取值零；当$|\theta| > 1$时，$\psi \equiv 1$；则存在一列数$\{t_j\}$，$t_j > 1$，$j=1,2,\cdots$，$t_j \to +\infty (j \to +\infty)$，使当$|\alpha|+|\beta|+l<j$时，有

$$\left| D^\alpha_\theta D^\beta_x \left[\psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right) a_j(x,\theta) \right] \right| \leqslant \frac{1}{2^j}(1+|\theta|)^{m_j - 1 - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} \tag{10}$$

$$(x,\theta) \in \overline{X}_l \times R_n \tag{11}$$

事实上，因$\psi\left(\frac{\theta}{t}\right)$关于$t>0$一致地属于$S^0$，故当 $|\alpha|+|\beta|+l<j$

且(11)成立时，可得：

$$\left|D_\theta^\alpha D_x^\beta\left[\psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right)a_j(x,\theta)\right]\right|$$

$$\leqslant C(\alpha,\beta,\overline{X}_l)(1+|\theta|)^{m_j-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$
$$\leqslant C_j(1+|\theta|)^{m_j-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

其中C_j与t_j无关。

注意当$m_j<m_{j-1}$且$\frac{|\theta|}{t_j}\leqslant\frac{1}{2}$时，$\psi\equiv0$，故只须考虑$|\theta|>\frac{t_j}{2}$的情形。于是有

$$C_j(1+|\theta|)^{m_j-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$
$$=C_j(1+|\theta|)^{m_j-m_{j-1}}(1+|\theta|)^{m_{j-1}-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$
$$\leqslant C_j\left(1+\frac{t_j}{2}\right)^{m_j-m_{j-1}}(1+|\theta|)^{m_{j-1}-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

故只须选择$t_j\geqslant\max[2(2^jC_j)^{\frac{1}{m_{j-1}-m_j}},j]$(这里要求$t_j\geqslant j$，是为了保证$t_j\to+\infty$)，就可推到估计式(10)。

现在令$a(x,\theta)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right)a_j(x,\theta)$，其中$t_j(j=1,2,\cdots)$如上选定，使(10)成立。

对每个$R>0$，记$\omega_R=\{\theta:|\theta|<R,\theta\in\boldsymbol{R}_n\}$，则由$\psi$的选择知：当$\theta\in\omega_R$且$t_j>2R$时，有$\psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right)\equiv0$。故

$$a(x,\theta)=\sum_{j=1}^{j_0(R)}\psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right)a_j(x,\theta),\quad(x,\theta)\in X\times\omega_R,$$

于是有

$$D_\theta^\alpha D_x^\beta a(x, \theta) = \sum_{j=1}^{j_0(R)} D_\theta^\alpha D_x^\beta \left[\psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right)a_j(x,\theta)\right],$$

即$a \in C^\infty(X \times \omega_R)$。由$R$的任意性知$a \in C^\infty(X \times \mathbf{R}_n)$，且

$$D_\theta^\alpha D_x^\beta a(x, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} D_\theta^\alpha D_x^\beta \left[\psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right)a_j(x, \theta)\right],$$

$$(x, \theta) \in X \times \mathbf{R}_n.$$

下面证明渐近展式关系：$a \sim \sum_j a_j$。为此只须证明当$r \geqslant 2$时，有$a - \sum_{j=1}^{r-1} a_j \in S_{\rho,\delta}^{m_r}$。

对每个紧集$K \subset X$，取$l = l(K)$，使$X_l \supset K$，$l > r$。于是当$(x,\theta) \in K \times \mathbf{R}_n \subset X_l \times \mathbf{R}_n$时，有

$$\left|D_\theta^\alpha D_x^\beta \left(a - \sum_{j=1}^{r-1} a_j\right)\right|$$

$$= \left| D_\theta^\alpha D_x^\beta \left[\sum_{j=1}^{\infty} \psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right)a_j - \sum_{j=1}^{r-1} a_j\right]\right|$$

$$\leqslant \left|D_\theta^\alpha D_x^\beta \left\{\sum_{j=1}^{r-1}\left[\psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right) - 1\right]a_j\right\}\right|$$

$$+ \left|D_\theta^\alpha D_x^\beta \sum_{j=r}^{|\alpha|+|\beta|+l} \psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right)a_j\right|$$

$$+ \left|D_\theta^\alpha D_x^\beta \sum_{j>|\alpha|+|\beta|+l} \psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right)a_j\right|$$

$$\equiv I_1 + I_2 + I_3.$$

因

$$\psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right)-1\in C_0^\infty(\mathbf{R}_n)\subset S^{-\infty}, \text{故} \sum_{j=1}^{r-1}\left(\psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right)-1\right)a_j\in S^{-\infty}\subset S^{m_r}_{\rho,\delta},$$

于是

$$I_1\leqslant C_1(\alpha,\beta,K)(1+|\theta|)^{m_r-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}.$$

由于I_2中和号内的每项属于$S^{m_r}_{\rho,\delta}$，且和为有限项，故有

$$I_2\leqslant C_2(\alpha,\beta,K)(1+|\theta|)^{m_r-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}.$$

为估计I_3，可利用估式(10)，并注意有

$$j>|\alpha|+|\beta|+l\geqslant l\geqslant r+1,\ m_{j-1}\leqslant m_r,$$

由此得

$$I_3\leqslant\sum_{j>|\alpha|+|\beta|+l}\frac{1}{2^j}(1+|\theta|)^{m_r-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

$$<2(1+|\theta|)^{m_r-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

于是

$$\left|D_\theta^\alpha D_x^\beta\left(a-\sum_{j=1}^{r-1}a_j\right)\right|\leqslant C(\alpha,\beta,K)(1+|\theta|)^{m_r-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

$$(x,\theta)\in K\times\mathbf{R}_n$$

故确有$a-\sum_{j=1}^{r-1}a_j\in S^{m_r}_{\rho,\delta}$，即$a\sim\sum_j a_j$。

注意，对给定的如上的列$\{a_j(x,\theta)\}$，相应的$a(x,\theta)$不是唯一的，因由渐近展开式性质1)知，当且仅当$a'-a\in S^{-\infty}$时，$a'\sim\sum_j a_j$。

下述定理使$a\sim\sum_j a_j$的检验过程简化。

定理6 设$a_j\in S^{m_j}_{\rho,\delta}(X\times\mathbf{R}_n)$，$m_j\to-\infty$。若$a\in C^\infty(X\times$

$\boldsymbol{R}_n$)满足下述两个条件：

(C_1) 对任一紧集$K \subset X$及任意指标组α，β，存在常数C及μ，只与α，β，K有关，使

$$|D_\theta^\alpha D_x^\beta a(x,\theta)| \leqslant C(1+|\theta|)^\mu,\ (x,\theta) \in K \times \boldsymbol{R}_n. \quad (12)$$

(C_2) 对任一紧集$K \subset X$，存在数列 $C_l = C_l(K)$及 $\mu_l = \mu_l(K)$，$l = 1,2,\cdots$，$\mu_l \to -\infty (l \to +\infty)$，使

$$\left|a(x,\ \theta) - \sum_{j=1}^{l-1} a_j(x,\ \theta)\right| \leqslant C_l(1+|\theta|)^{\mu_l},$$

$$(x,\theta) \in K \times \boldsymbol{R}_n, \quad (13)$$

则有$a \sim \sum_j a_j$。

这个定理的意义在于：只要导数$D_\theta^\alpha D_x^\beta a$满足弱得多的估计式(12)，则不必对(13)左边的各阶导数进行估计，只须对其本身验证估计式(13)就够了。这当然方便得多。

定理的证明依赖于下述引理的多维推广。

引理1 设$f(t) \in C^2[-1,\ 1]$，记

$$A_j = \sup_{|t| \leqslant 1} |f^{(j)}(t)|,\ j = 0,2,$$

则有

$$|f'(0)|^2 \leqslant 4A_2(A_0 + A_2).$$

证 因

$$|f'(t) - f'(0)| \leqslant A_2|t|$$

故当 $A_2|t| \leqslant \frac{1}{2}|f'(0)|$，$|t| \leqslant 1$时，有$|f'(t)| \geqslant \frac{1}{2}|f'(0)|$。

记

$$B = \min\left\{\frac{|f'(0)|}{2A_2},\ 1\right\}$$

则当$t\in[-B,B]$时，有$|f'(t)|\geqslant\frac{1}{2}|f'(0)|$。于是

$$2A_0\geqslant|f(B)-f(-B)|=|f'(\tau)[B-(-B)]|$$
$$\geqslant\frac{1}{2}|f'(0)|2B=B|f'(0)|$$

注意当$f'(0)=0$时，显然有

$$|f'(0)|^2\leqslant 4A_0(A_0+A_2)$$

而当$f'(0)\neq 0$时，有

$$|f'(0)|\leqslant\frac{2A_0}{B}=2A_0\max\left\{\frac{2A_2}{|f'(0)|},\ 1\right\},$$

故或$|f'(0)|\leqslant\frac{4A_0A_2}{|f'(0)|}$，或$|f'(0)|\leqslant 2A_0$。总之有

$$|f'(0)|^2\leqslant 4A_0(A_0+A_2).$$

引理2 设K_1及K_2是$\boldsymbol{R}^p$中的两个紧集，且K_1含于K_2的内部：$K_1\subset\operatorname{int}K_2$，则存在常数$C>0$，对任一在$K_2$的某邻域中具二阶连续偏导数的函数$f(x)$，有

$$\left(\sup_{K_1}\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha f|\right)^2$$
$$\leqslant C\sup_{K_2}|f(x)|\left[\sup_{K_2}|f(x)|+\sup_{K_2}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha f|\right]\quad(13')$$

证 因K_1含于K_2的内部，故紧集K_1与集$\boldsymbol{R}^p\setminus K_2$的闭包有正距离$r>0$。对$K_1$上每点$x^0$，作半径为$r$的球邻域$\omega_r(x^0)$，则$\omega_r(x^0)\subset K_2$，且$\omega_r(x^0)$中每点$x$可表示为$x=x^0+tr\xi$，$|t|\leqslant 1$，$|\xi|=1$，$t\in\boldsymbol{R}^1$，$\xi\in\boldsymbol{R}^p$。令

$$g(t)=f(x^0+t\xi r),\quad |t|\leqslant 1,$$

把引理1应用于$g(t)$，并注意

$$g'(t)=\sum_{j=1}^{p} r\xi_j\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x^0+tr\xi);$$

$$g''(t)=\sum_{i,\ j=1}^{p} r^2\xi_i\xi_j\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)(x^0+tr\xi),$$

可得

$$r^2\left|\sum_{j=1}^{p}\xi_j\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_j}\right|^2\leqslant 4\sup_{|t|<1}|f(x^0+tr\xi)|$$

$$\times\left\{\sup_{|t|<1}|f(x^0+rt\xi)|\right.$$

$$\left.+r^2\sup_{|t|<1}\left|\sum_{i,\ j=1}^{p}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)(x^0+tr\xi)\xi_i\xi_j\right|\right\}$$

$$\leqslant 4\sup_{K_2}|f(x)|\left\{\sup_{K_2}|f(x)|+r^2\sup_{K_2}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha f(x)|\right\}.$$

记

$$e^{(l)}=(\delta_{1l},\cdots,\delta_{pl}),\ l=1,\cdots,p,$$

其中δ_{jl}为Kronecker记号，$\delta_{jl}=\begin{cases}1, & 当\ j=l\\ 0, & 当\ j\neq l\end{cases}$. 取 $\xi=e^{(l)}$，有

$$\left|\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_l}\right|\leqslant\left\{4\sup_{K_2}|f(x)|\left[\frac{1}{r^2}\sup_{K_2}|f(x)|\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sup_{K_2}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha f|\right]\right\}^{\frac{1}{2}},\ l=1,\cdots,p,$$

由此得

$$\left(\sup_{K_1}\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha f|\right)^2$$

$$\leqslant 4p^2 \sup_{K_2} |f(x)| \left[\frac{1}{r^2} \sup_{K_2} |f(x)| + \sup_{K_2} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha f| \right]$$

$$\leqslant C \sup_{K_2} |f| \left[\sup_{K_2} |f| + \sup_{K_2} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha f| \right]$$

其中$C = 4p^2 \max\left(\frac{1}{r^2}, 1\right)$.

现在证明定理6. 由定理 5 及渐近展式的性质 1)知，存在$b \in S^{\overline{m}_1}_{\rho,\delta}$，使$b \sim \sum_j a_j$. 记$d = a - b$，若能证$d \in S^{-\infty}$，则显然有$a \sim \sum_j a_j$.

由$b \in S^{\overline{m}_1}_{\rho,\delta}$及条件$(C_1)$，知存在仅依赖于$\alpha, \beta, K$的常数$C$及$\mu$，使

$$|D_\theta^\alpha D_x^\beta d(x,\theta)| \leqslant C(1+|\theta|)^\mu, \quad (x,\theta) \in K \times \boldsymbol{R}_n. \tag{14}$$

另一方面，由条件(C_2)及显然的关系

$$a - b = \left(a - \sum_{j=1}^{l-1} a_j\right) - \left(b - \sum_{j=1}^{l-1} a_j\right)$$

可得

$$|d(x,\theta)| \leqslant C_l(K)(1+|\theta|)^{\mu_l(K)} + C_l'(K)(1+|\theta|)^{\overline{m}_l},$$

故有

$$|d(x,\theta)| \leqslant C_l''(K)(1+|\theta|)^{\nu_l(K)}, \quad (x,\theta) \in K \times \boldsymbol{R}_n, \tag{15}$$

其中$\nu_l(K) = \max(\mu_l(K), \overline{m}_l) \to -\infty \quad (l \to +\infty)$. 记

$$d_\theta(x,\xi) = d(x, \theta+\xi),$$

显然有

$$D_\xi^\alpha D_x^\beta d_\theta(x,\xi)|_{\xi=0}=D_\theta^\alpha D_x^\beta d(x,\theta),$$

取$K_1=K\times\{0\}$，$K_2=\widehat{K}\times\{\xi;\ |\xi|<1\}$，$\widehat{K}$为$X$中紧集，而使$K\subset\mathrm{int}\widehat{K}$。据引理2及估计式(15)，可得

$$\left(\sup_K\sum_{|\alpha|+|\beta|=1}|D_\theta^\alpha D_x^\beta d(x,\theta)|\right)^2$$

$$\leqslant\left(\sup_{K_1}\sum_{|\alpha+\beta|=1}|D_\xi^\alpha D_x^\beta d_\theta(x,\ \xi)|\right)^2$$

$$\leqslant C_0(K)\sup_{K_2}|d_\theta(x,\ \xi)|\Big[\sup_{K_2}|d_\theta(x,\xi)|$$

$$+\sup_{K_2}\sum_{|\alpha+\beta|=2}|D_\xi^\alpha D_x^\beta d_\theta(x,\ \xi)|\Big]$$

$$\leqslant C_0(K)C_l''(K)(1+|\theta+\xi|)^{\nu_l(K)}[C_l''(1$$
$$+|\theta+\xi|)^{\nu_l(K)}+C(K)(1+|\theta+\xi|)^{\mu(K)}].$$

由于$|\xi|=1$，故有

$$\frac{1}{2}(1+|\theta|)\leqslant 1+|\theta+\xi|\leqslant 2(1+|\theta|),$$

于是当$|\alpha+\beta|=1$时，得如下估计

$$|D_\theta^\alpha D_x^\beta d(x,\theta)|\leqslant C_1(K)(1+|\theta|)^{\nu_l'(K)},$$
$$(x,\theta)\in K\times R_n, \tag{16}$$

其中$\nu_l'(K)\to-\infty(l\to+\infty)$。因此，对任何实数$m$，只要$l$充分大，可使

$$|D_\theta^\alpha D_x^\beta d(x,\theta)|\leqslant C(\alpha,\beta,K)(1+|\theta|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \tag{17}$$

$$|\alpha+\beta|=1,\ (x,\theta)\in K\times R_n,$$

当$|\alpha+\beta|=2$时，重复应用上述讨论，这时代替（15）而利用(16)，又可得形如(16)及(17)的估式。依此类推，知(17)对所

有的α及β成立。故 $d\in S^{m}_{\rho,\delta}$。由m的任意性知$d\in S^{-\infty}$。定理证毕。

3.3.4 用振幅表示适拟微分算子的符征

由此以下假定ρ及δ满足要求$0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$。

定理7 设A为以$a\in S^{m}_{\rho,\delta}(X\times X\times \boldsymbol{R}_n)$作振幅的适$\psi$DO，则$A$的符征$\sigma_A(x,\xi)$有渐近展式

$$\sigma_A(x,\xi)\sim\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x,y,\xi)|_{y=x},\qquad (18)$$

$$\partial_\xi^\alpha\equiv\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)^{\alpha_n},$$

$$D_y^\alpha\equiv\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{\alpha_n}.$$

注3 因 $\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a|_{y=x}\in S^{m-(\rho-\delta)|\alpha|}_{\rho,\delta}$，而$\rho-\delta>0$，故

$$m_\alpha\equiv m-(\rho-\delta)|\alpha|\to-\infty\qquad(|\alpha|\to+\infty);$$

因此，(18)符合渐近展式的要求。这也表明有必要作$\delta<\rho$的假定。

证 首先可注意，若(18)对A的适振幅a成立，则对A的任一振幅a'仍成立。事实上，因对角集$\Delta\equiv\{(x,y)\in X\times X, y=x\}$含于 sing supp$K_A$，随之也含于适集supp$K_A$中。据定理2及其证明，知存在具适合的函数$\tau(x,y)$，在supp$K_A$的某个邻域中恒等于1，使$\tau a'$为$A$的适振幅。于是

$$\sigma_A(x,\xi)\sim\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha(\tau a')|_{y=x}$$

$$=\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a'|_{y=x}.$$

由此得知，只须对A的适振幅a证明式(18)。

据适振幅的定义知：当x限制于紧集K上时，$a(x,y,\xi)$作为y的函数具紧台K'，且K'只依赖于K，而与θ无关。故σ_A可表示为：

$$\sigma_A(x,\xi)=\iint a(x,y,\theta)e^{i(x-y,\theta)}e^{i(y-x,\xi)}dy\bar{d}\theta. \tag{19}$$

上式当$x\in K$时，关于y的积分沿紧集K'进行。

注意集合$K''=\{z; z=y-x,\ x\in K,\ y\in K'\}$为紧集，因此可改写(19)如下：

$$\begin{aligned}\sigma_A(x,\xi)&=\iint e^{-i(y-x,\theta-\xi)}a(x,y,\theta)dy\bar{d}\theta\\&=\iint e^{-i(z,\eta)}a(x,x+z,\xi+\eta)dz\bar{d}\eta\\&=\iint[(1-\triangle_z)^l e^{-i(z,\eta)}](1+|z|^2)^l\\&\quad\times a(x,x+z,\xi+\eta)dz\bar{d}\eta,\end{aligned}$$

其中$\eta=\theta-\xi$，$\triangle_z=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial z_j^{\,2}}$。易知有：

$$\begin{aligned}&|D_\xi^\alpha D_x^\beta(1-\triangle_z)^l a(x,x+z,\xi+\eta)|\\&\leqslant C(\alpha,\beta,l,K)(1+|\xi+\eta|)^{m-\rho|\alpha|+\delta(|\beta|+2l)}\\&\qquad x\in K, z\in K'', \xi,\eta\in \mathbf{R}_n.\end{aligned}\tag{20}$$

由(20)及明显的初等不等式

$$\begin{aligned}&(1+|\eta|^2)^{-l}\leqslant 2^l(1+|\eta|)^{-2l}\\&\leqslant 2^l(1+|\xi|)^{2l}(1+|\xi+\eta|)^{-2l}\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}&|D_\xi^\alpha D_x^\beta\sigma_A(x,\xi)|\leqslant C_1(\alpha,\beta,l,K)(1+|\xi|)^{2l}\\&\times\int(1+|\xi+\eta|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|-l(1-\delta)}\bar{d}\eta.\end{aligned}$$

取$l\geqslant\frac{m+n+1-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}{1-\delta}$，注意到$(1+|\xi+\eta|)\geqslant\frac{1+|\eta|}{1+|\xi|}$，有

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta \sigma_A(x,\xi)|\leqslant C(\alpha,\beta,K)(1+|\xi|)^{\mu(\alpha,\beta,K)},\quad x\in K,$$

其中$\mu=2l+n+1$。故σ_A满足定理 6 的条件(C_1)。

另一方面，由Taylor公式知

$$\sigma_A(x,\xi)=\iint e^{-i(z,\eta)}a(x,x+z,\xi+\eta)dz\,đ\eta$$

$$=\iint e^{-i(z,\eta)}\Big[\sum_{|\alpha|\leqslant N-1}\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a(x,x+z,\xi)$$

$$+\sum_{|\alpha|=N}\frac{N\eta^\alpha}{\alpha!}\int_0^1(1-t)^{N-1}\partial_\xi^\alpha a(x,x+z,\xi+t\eta)dt\Big]dz\,đ\eta$$

$$\equiv I_N+R_N.$$

利用分部积分，改写I_N如下形：

$$I_N\equiv\sum_{|\alpha|\leqslant N-1}\iint e^{-i(z,\eta)}\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a(x,x+z,\xi)dz\,đ\eta$$

$$=\sum_{|\alpha|<N}\iint e^{-i(z,\eta)}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_z^\alpha a(x,x+z,\xi)dz\,đ\eta.$$

注意

$$\int e^{-i(z,\eta)}\partial_\xi^\alpha D_z^\alpha a(x,x+z,\xi)dz$$

$$=F_z[\partial_\xi^\alpha D_z^\alpha a(x,x+z,\xi)],$$

这里F_z表示关于z的Fourier变换，故有

$$I_N=\sum_{|\alpha|<N}\Big\{\int e^{i(z,\eta)}\frac{1}{\alpha!}F_z[\partial_\xi^\alpha D_z^\alpha a(x,x+z,\xi)]đ\eta\Big|_{z=0}$$

$$=\sum_{|\alpha|<N}\Big\{\frac{1}{\alpha!}F_z^{-1}F_z[\partial_\xi^\alpha D_z^\alpha a(x,x+z,\xi)]\Big\}_{z=0}$$

$$= \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x, y, \xi)|_{y=x}.$$

于是得

$$\sigma_A(x, \xi) - \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x, y, \xi)|_{y=x} = R_N \qquad (21)$$

记 $$G_1 = \left\{ \eta : |\eta| \leqslant \frac{1}{2}|\xi|, \ \eta \in \boldsymbol{R}_n \right\}$$

$$G_2 = \left\{ \eta : |\eta| > \frac{1}{2}|\xi|, \ \eta \in \boldsymbol{R}_n \right\}$$

把R_N的积分域分为$K'' \times G_1$及$K'' \times G_2$，这里K''为对z 的积分域，相应得 $R_N = R_N^{(1)} + R_N^{(2)}$。下面分别对这两项进行估计。

$$|R_N^{(1)}| = \left| \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} \iint\limits_{K'' \times G_1} \int_0^1 e^{-i(z, \eta)} \eta^\alpha \partial_\xi^\alpha \right.$$

$$\left. \times a(x, x+z, \xi + t\eta)(1-t)^N dt dz đ\eta \right|$$

$$= \left| \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} \iint\limits_{K'' \times G_1} \int_0^1 e^{-i(z, \eta)} \partial_\xi^\alpha D_z^\alpha \right.$$

$$\left. \times a(x, x+z, \ \xi + t\eta)(1-t)^N dt dz đ\eta \right|$$

$$\leqslant \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} C(\alpha, K) \int\limits_{G_1} \int\limits_{K''} (1 + |\xi + t_1\eta|)^{m-(\rho-\delta)|\alpha|} dz đ\eta,$$

$$t_1 \in (0,1)$$

或

$$|R_N^{(1)}| \leqslant C_N(K) \int\limits_{|\eta| \leqslant |\xi|/2} (1 + |\xi + t_1\eta|)^{m-N(\rho-\delta)} đ\eta,$$

$$x \in K, \ t_1 \in (0,1)$$

当$|\eta|\leqslant\frac{|\xi|}{2}$时，有

$$\frac{1}{2}(1+|\xi|)\leqslant 1+|\xi+t_1\eta|\leqslant 2(1+|\xi|)$$

且以$\frac{|\xi|}{2}$为半径的球体积具阶 $V_n|\xi|^n$，V_n为只依赖于n的常数，由此知

$$|R_N^{(1)}|\leqslant C_N'(K)(1+|\xi|)^{m+n-N(\rho-\delta)}, \quad x\in K. \tag{22}$$

为估计$R_N^{(2)}$，先考虑积分：

$$|J_\alpha|\equiv\left|\iint\limits_{K''\times G_2} e^{-i(z,\eta)}\eta^\alpha\partial_\xi^\alpha a(x,x+z,\xi+t\eta)dz\,d\eta\right|$$

$$=\left|\iint\limits_{K''\times G_2} e^{-i(z,\eta)}\partial_\xi^\alpha D_z^\alpha a(x,x+z,\ \xi+t\eta)dz\,d\eta\right|$$

$$=\left|\int\limits_{G_2}\int\limits_{K''} e^{-i(z,\eta)}(1+|\eta|^2)^{-l}\right.$$

$$\left.\times(1-\triangle_z)^l\partial_\xi^\alpha D_z^\alpha a(x,x+z,\xi+t\eta)dz\,d\eta\right|$$

$$\leqslant\int\limits_{|\eta|>|\xi|/2} C(\alpha,l,K)(1+|\eta|)^{-2l}$$

$$\times(1+|\xi+t\eta|)^{m-(\rho-\delta)|\alpha|+2l\delta}d\eta.$$

当$|\eta|>\frac{|\xi|}{2}$时，$(1+|\xi+t\eta|)\leqslant 3(1+|\eta|)$，记$p_N=\max(m-(\rho-\delta)N,\ 0)$有：

$$|J_\alpha|\leqslant\int\limits_{G_2} C_1(\alpha,l,K)(1+|\eta|)^{-2l(1-\delta)+p_N}d\eta$$

$$\leqslant C_2(\alpha,l,K)(1+|\xi|)^{-2l(1-\delta)+p_N+n+1}.$$

取$l=l(N)$充分大，使

$$-2l(1-\delta)+p_N+n+1 \leqslant \min(m+n-N(\rho-\delta),0)$$

即有：

$$|R_N^{(2)}| = \left|\sum_{|\alpha|=N}\frac{N}{\alpha!}\int_0^1 J_\alpha(1-t)^N dt\right|$$

$$\leqslant C_N''(K)(1+|\xi|)^{m+n-N(\rho-\delta)}, \quad x\in K \tag{23}$$

结合(21)、(22)及(23)，得

$$\left|\sigma_A(x,\xi)-\sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x,y,\xi)|_{y=x}\right|$$

$$\leqslant C_N(K)(1+|\xi|)^{\mu_N}, \quad x\in K,$$

其中 $\mu_N=m+n-N(\rho-\delta)\to-\infty(N\to+\infty)$。故定理6中条件$(C_2)$也成立。于是定理7得证。

推论1 设$A\in L_{\rho,\delta}^m(X)$，$0\leqslant\delta<\rho\leqslant1$，则$\sigma_A(x,\xi)\in S_{\rho,\delta}^m$；且对每个 $b(x,\xi)\in S_{\rho,\delta}^m$，存在适拟微分算子 $B\in L_{\rho,\delta}^m$，使$\sigma_B(x,\xi)\cong b(x,\xi)(\mathrm{mod}S^{-\infty}(X\times \boldsymbol{R}_n))$。

3.3.5 拟微分算子的转置与合成

如前所述，拟微分算子A的转置${}^tA$由下式确定

$$(Au,v)=(u,{}^tAv), \quad \forall u,v\in C_0^\infty(X)。$$

这里$(\varphi,\psi)=\int_X\varphi\psi dx$，$\varphi,\psi\in C^\infty(X)$，且至少有一属$C_0^\infty(X)$。

A的伴算子A^*则由如下的内积关系确定：

$$\langle Au,v\rangle=\langle u,A^*v\rangle, \quad \forall u,v\in C_0^\infty(X)。$$

这里$\langle\varphi,\psi\rangle=\int\varphi\overline{\psi}dx$，而与$(\varphi,\psi)$有所不同。

设$A=O_p(a)$，$a(x,y,\xi)\in S_{\rho,\delta}^m(X\times X\times\boldsymbol{R}_n)$。容易算出

$$({}^tAv)(y)=\iint e^{i(x-y,\xi)}a(x,y,\xi)v(x)dx\,\bar{d}\xi.$$

类似地可算出

$$(A^*v)(y)=\iint e^{-i(x-y,\xi)}\overline{a(x,y,\xi)}v(x)dx\,\bar{d}\xi,$$

或由A的符征$\sigma_A(x,\xi)$表示式(8)

$$(Au)(x)=\iint e^{i(x-y,\xi)}\sigma_A(x,\xi)u(y)dy\,\bar{d}\xi \tag{8}$$

得${}^tA$及A^*的如下表示

$$({}^tAv)(y)=\iint e^{i(x-y,\xi)}\sigma_A(x,\xi)v(x)dx\,\bar{d}\xi; \tag{24}$$

$$(A^*v)(y)=\iint e^{-i(x-y,\xi)}\overline{\sigma_A(x,\xi)}v(x)dx\,\bar{d}\xi. \tag{25}$$

在(24)中互换x及y，并换ξ为$-\xi$，得标准表示。

$$({}^tAv)(x)=\iint e^{i(x-y,\xi)}\sigma_A(y,-\xi)v(y)dy\,\bar{d}\xi. \tag{24'}$$

同样，在(25)中互换x及y，得标准表示

$$(A^*v)(x)=\iint e^{i(x-y,\xi)}\overline{\sigma_A(y,\xi)}\,v(y)dy\,\bar{d}\xi. \tag{25'}$$

定理8 设A为适ψDO，其符征为$\sigma_A(x,\xi)$。记${}^tA$的符征为$\sigma_{{}^tA}$，A^*的符征为σ_{A^*}，则有

$$\sigma_{{}^tA}(x,\xi)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha\sigma_A(x,-\xi), \tag{26}$$

$$\sigma_{A^*}(x,\xi)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha\overline{\sigma_A(x,\xi)}. \tag{27}$$

证 这时${}^tA$及A^*都是适ψDO，且由(24′)及(25′)知${}^tA$的振幅是$\sigma_A(y,-\xi)$，A^*的振幅是$\overline{\sigma_A(y,\xi)}$。应用定理7，即得渐近展式(26)及(27)。

为了以后的需要，还得引进适拟微分算子A的对偶算子 $\widehat{A}$ 及σ_A的对偶符征$\widehat{\sigma}_A$。

设A为适ψDO，其符征为$\sigma_A(x,\xi)$。先定义σ_A的**对偶符征** $\widehat{\sigma}_A$如下

$$\widehat{\sigma}_A(x,\xi)=\sigma_{{}^tA}(x,-\xi),$$

由(26)可得下述结果。

定理9 对偶符征$\widehat{\sigma}_A(x,\xi)$具渐近展式

$$\widehat{\sigma}_A(x,\xi)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}(-\partial_\xi)^\alpha D_x^\alpha\sigma_A(x,\xi). \qquad (28)$$

对偶符征的作用可由下述命题看出。

命题2 设A为适ψDO，$u\in C_0^\infty(X)$，则Au的Fourier 变换$F[Au]$可表示为

$$F[Au](\xi)=\iint e^{i\langle y,\eta-\xi\rangle}\widehat{\sigma}_A(y,\xi)\widehat{u}(\eta)dy\,đ\eta. \qquad (29)$$

证 因${}^t({}^tA)=A$，据(24′)有

$$(Au)(x)=\iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\sigma_{{}^tA}(y,-\xi)u(y)dy\,đ\xi$$

$$=\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\left[\int e^{-i\langle y,\xi\rangle}\sigma_{{}^tA}(y,-\xi)u(y)dy\right]đ\xi$$

$$=F^{-1}\left[\int e^{-i\langle y,\xi\rangle}\widehat{\sigma}_A(y,\xi)u(y)dy\right](x),$$

由此得

$$F[Au](\xi)=\int e^{-i\langle y,\xi\rangle}\widehat{\sigma}_A(y,\xi)u(y)dy. \qquad (30)$$

把$u(y)=\int e^{i\langle y,\eta\rangle}\widehat{u}(\eta)đ\eta$代入(30)，即得(29)。

现在定义适拟微分算子A的对偶算子$\widehat{A}$为$\widehat{C_0^\infty}(X)$到其自身的线性映射，使得

$$\widehat{A}[Fu]=F[Au],\ \forall u\in C_0^\infty(X), \tag{31}$$

由(29)知，对每个$v(\eta)\in \widehat{C_0^\infty}(X)$，有

$$(\widehat{A}v)(\xi)=\iint e^{i(y,\eta-\xi)}\widehat{\sigma_A}(y,\xi)\widehat{v}(\eta)dy\,d\eta. \tag{32}$$

定理10 设A及B都是适ψDO，$A\in L^{m_1}_{\rho,\delta}(X)$，$B\in L^{m_2}_{\rho,\delta}(X)$. 记$C=B\circ A$：$Cu=B[Au]$，$\forall u\in C_0^\infty(X)$，则$C$也是适ψDO，且$C\in L^{m_1+m_2}_{\rho,\delta}(X)$，相应的符征间具关系：

$$\sigma_{B\circ A}(x,\xi)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\sigma_B(x,\xi)D_x^\alpha\sigma_A(x,\xi). \tag{33}$$

证 利用(30)，可得

$$Cu=B(Au)=\int e^{i(x,\xi)}\sigma_B(x,\xi)(\widehat{Au})(\xi)\,d\xi$$

$$=\int e^{i(x,\xi)}\sigma_B(x,\xi)\left[\int e^{-i(y,\xi)}\widehat{\sigma_A}(y,\xi)u(y)dy\right]d\xi$$

$$=\iint e^{i(x-y,\xi)}\sigma_B(x,\xi)\widehat{\sigma_A}(y,\xi)u(y)dy\,d\xi. \tag{34}$$

因$\sigma_B(x,\xi)\widehat{\sigma_A}(y,\xi)=\sigma_B(x,\xi)\sigma_{{}^tA}(y,-\xi)\in S^{m_1+m_2}_{\rho,\delta}(X\times X\times R_n)$，故由上式知$C\in L^{m_1+m_2}_{\rho,\delta}(X)$。又由显然的关系式${}^tC={}^tA\circ{}^tB$以及定理4，知$C$为适ψDO。剩下须证明渐近展式(33)。

由(34)知C有振幅$\sigma_B(x,\xi)\widehat{\sigma_A}(y,\xi)$。于是据定理7、定理9以及3.3.3中所列举的渐近展式的性质，可得如下结果(约定

$\sum_j a_j \sim \sum_j b_j$ 表示它们是同一函数的渐近展式)：

$$\sigma_{B\circ A}(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha[\sigma_B(x,\xi)\widehat{\sigma}_A(y,\xi)]|_{y=x}$$

$$= \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha[\sigma_B(x,\xi)D_x^\alpha\widehat{\sigma}_A(x,\xi)]$$

$$\sim \sum_\alpha\sum_\beta \frac{1}{\alpha!\beta!}\partial_\xi^\alpha[\sigma_B(x,\xi)(-\partial_\xi)^\beta D_x^{\alpha+\beta}\sigma_A(x,\xi)]$$

$$= \sum_\alpha \sum_{\substack{\beta,\gamma,\delta \\ \gamma+\delta=\alpha}} \frac{1}{\beta!\gamma!\delta!}[\partial_\xi^\gamma\sigma_B(x,\xi)][(-\partial_\xi)^\beta\partial_\xi^\delta D_x^{\alpha+\beta}\sigma_A(x,\xi)]$$

$$= \sum_\beta \sum_{\gamma,\delta} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!\gamma!\delta!}[\partial_\xi^\gamma\sigma_B][\partial_\xi^{\beta+\delta}D_x^{\beta+\gamma+\delta}\sigma_A],$$

或

$$\sigma_{B\circ A}(x,\xi) \sim \sum_\gamma \frac{1}{\gamma!}\sum_k\left(\sum_{\beta+\delta=k}\frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!\delta!}\right)[\partial_\xi^\gamma\sigma_B]\partial_\xi^k D_x^{k+\gamma}\sigma_A. \tag{35}$$

记

$$(x+y)^k = (x_1+y_1)^{k_1}(x_2+y_2)^{k_2}\cdots(x_n+y_n)^{k_n},$$
$$k=(k_1,\cdots,k_n)。$$

在公式

$$(x+y)^k = \sum_{\beta+\delta=k}\frac{k!}{\beta!\delta!}x^\delta y^\beta$$

中取 $x=-y=(1,1,\cdots,1)=e$，可得

$$\sum_{\beta+\delta=k}\frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!\delta!} = \frac{1}{k!}(e-e)^k = \frac{1}{k!}\begin{cases}1, k=(0,\cdots,0); \\ 0, k\neq(0,\cdots,0);\end{cases}$$

代入(35)，即得渐近展式(33)。

推论2 设$A\in L^{m_1}_{\rho,\delta}(X)$，$B\in L^{m_2}_{\rho,\delta}(X)$，$0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$，且$B$为适ψDO，则算子$A\circ B$及算子$B\circ A$都属于$L^{m_1+m_2}_{\rho,\delta}$，并映$C_0^\infty(X)$到$C^\infty(X)$。

证 先对$A\in L^{-\infty}(X)$的特殊情形证明$A\circ B$及$B\circ A$都属于$L^{-\infty}(X)$。事实上，因$A\in L^{-\infty}(X)$，故A为具C^∞光滑核的积分算子，而有：

$$Au=\int K_A(y,z)u(z)dz,\ K_A\in C^\infty(X\times X),u\in C_0^\infty(X).$$

于是

$$(B\circ A)u=$$

$$\iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}b(x,y,\xi)\left[\int K_A(y,z)u(z)dz\right]dy\,đ\xi,$$

其中$b(x,y,\xi)$为B的适振幅。当x在紧集上变动时，关于y的积分域也是紧集。利用振荡积分正规化的等价定义(见3.1.2式(3))，有

$$\begin{aligned}B\circ Au&=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\tau(\varepsilon\xi)b(x,y,\xi)\\&\quad\times\left[\int K_A(y,z)u(z)dz\right]dy\,đ\xi\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\left[\iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\tau(\varepsilon\xi)b(x,y,\xi)\right.\\&\quad\left.\times K_A(y,z)dy\,đ\xi\right]u(z)dz\\&=\int\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\tau(\varepsilon\xi)b(x,y,\xi)\right.\\&\quad\left.\times K_A(y,z)dy\,đ\xi\right]u(z)dz\\&=\int\left[\iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}b(x,y,\xi)K_A(y,z)dy\,đ\xi\right]u(z)dz.\end{aligned}$$

记

$$C(x,z)=\iint e^{i(x-y,\xi)}b(x,y,\xi)K_A(y,z)dyd\xi$$

$$\equiv B[K_A(y,z)]$$

仿照3.3.2命题1的证明，知$C(x,z)\in C^\infty(X\times X)$，故$B\circ A$为具$C^\infty$光滑核的积分算子，于是$B\circ A\in L^{-\infty}(X)$。又因$A\circ B={}^t(B^t\circ A)$，故也有$A\circ B\in L^{-\infty}(X)$。

现在考虑一般情形。据3.3.1定理3知A可分解为$A=A_1+A_2$，其中A_1为适ψDO，$A_2\in L^{-\infty}(X)$。于是$B\circ A=B\circ A_1+B\circ A_2$。由定理10上面及上面已证得的结果，知$B\circ A_2\in L^{-\infty}$，$B\circ A_1\in L^{m_1+m_2}_{\rho,\delta}$，故$B\circ A\in L^{m_1+m_2}_{\rho,\delta}(X)$。同理可证明$A\circ B\in L^{m_1+m_2}_{\rho,\delta}(X)$。

3.3.6 经典拟微分算子

定义6 若拟微分算子A的符征$\sigma_A(x,\xi)$具如下性质的渐近展式

$$\sigma_A(x,\xi)\sim\sum_{j=0}^{\infty}a_{m-j}(x,\xi)\quad(\text{对大的}|\xi|),\tag{36}$$

其中a_{m-j}关于大的$|\xi|$为正齐$m-j$次函数，$j=0,1,\cdots$ 则称σ_A为**经典符征**，记作$\sigma_A\in CS^m(X\times \boldsymbol{R}_n)$，并称$A$为经典ψDO，记作$A\in CL^m(X)$。

注4 所谓"对大的$|\xi|$有$a\sim\sum_j a_j$"，指的是：存在$\psi\in C^\infty(\boldsymbol{R}_n)$，当$|\xi|\leqslant\frac{1}{2}$时，$\psi(\xi)=0$；当$|\xi|>1$时，$\psi(\xi)=1$，使

$$a(x,\xi)\sim\sum_j\psi(\xi)a_j(x,\xi) \tag{37}$$

容易验证下述命题。

命题3 a）若$A\in CL^m(X)$，则A的主符征 $\sigma_A^{(m)}(x,\xi)$存在：$\sigma_A^{(m)}(x,\xi)=a_m(x,\xi)$，$a_m$是渐近展式(36)中的首项；

b）若A_1及A_2都是适ψDO，且$A_j\in CL^{m_j}(X)$，$j=1,2$，则$A_1\circ A_2\in CL^{m_1+m_2}(X)$，且其主符征$\sigma_{A_1\circ A_2}^{(m_1+m_2)}=\sigma_{A_1}^{(m_1)}\cdot\sigma_{A_2}^{(m_2)}$；

c）设$A\in CL^m(X)$，则${}^tA$及A^*也属于$CL^m(X)$。

3.4 变量代换与流形上的拟微分算子

3.4.1 拟微分算子的变量代换

设给定由域$X\subset\mathbf{R}^n$到域$X_1\subset\mathbf{R}^n$的微分同胚κ：$X\to X_1$，它引出拖射

$$\kappa^*:C^\infty(X_1)\to C^\infty(X):u\to u\circ\kappa,$$

κ^*作成同构，并映$C_0^\infty(X_1)$到$C_0^\infty(X)$。设A为X中的ψDO，用下面的可换图定义算子A_1：$C_0^\infty(X_1)\to C^\infty(X_1)$：

$$\begin{array}{ccc} C_0^\infty(X) & \xrightarrow{A} & C^\infty(X) \\ \uparrow{\scriptstyle\kappa^*} & & \uparrow{\scriptstyle\kappa^*} \\ C_0^\infty(X_1) & \xrightarrow{A_1} & C^\infty(X_1) \end{array}$$

有$\kappa^*A_1u=A\kappa^*u=A(u\circ\kappa)$，即$(A_1u)\circ\kappa=A(u\circ\kappa)$，记

$$\kappa_1=\kappa^{-1},$$

得

$$A_1 u = [A(u \circ \kappa)] \circ \kappa_1. \qquad (1)$$

设$A = O_p(a)$，$a = a(x,y,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times X \times \boldsymbol{R}_n)$，有：

$$(A_1 u)(x) = \iint e^{i(\kappa_1(x) - y, \xi)} a(\kappa_1(x), y, \xi) u(\kappa(y)) dy \, \xi,$$

令$y = \kappa_1(z)$，则上式变为：

$$(A_1 u)(x) = \iint e^{i(\kappa_1(x) - \kappa_1(z), \xi)} a(\kappa_1(x), \kappa_1(z), \xi) u(z) |\det \kappa_1'(z)| dz d\xi, \qquad (2)$$

其中κ_1'为映射κ_1的Jacobi方阵。故A_1为具位相函数$\varphi(x,y,\xi) = (\kappa_1(x) - \kappa_1(y), \xi)$的FIO。可证明：当 $1-\rho \leqslant \delta < \rho$时，$A_1$为$\psi$DO。这可由下述一般性定理推出。

定理1 设定义于$X \times X \times \boldsymbol{R}_n$的位相函数$\varphi$具性质：

1）$\varphi(x,y,\theta)$关于θ为线性函数；

2）当且仅当$x = y$时，有$|\varphi_\theta'(x,y,\theta)| = 0$；

设A_1的振幅$a(x,y,\theta) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times X \times \boldsymbol{R}_n)$，且

$$1 - \rho \leqslant \delta < \rho, \qquad (3)$$

则FIO A_1为ψDO：$A_1 \in L^m_{\rho,\delta}(X)$。

为证明定理1，先建立下面的引理。

引理1 设位相满足定理1中的条件1)及2)，则存在对角集$\triangle \subset X \times X$的邻域$\Omega$及在$\Omega$中非退化的$n \times n$实方阵函数 $\psi(x, y) \in C^\infty(\Omega)$，即$\psi$的每个元$\psi_{ij}$属$C^\infty(\Omega)$，$i, j = 1, \cdots, n$，使

$$\varphi(x,y,\psi(x,y)\xi) = (x-y, \xi). \quad (x,y) \in \Omega \qquad (4)$$

$$\det\psi(x,x) \det \varphi''_{x,\theta}(x,y,\theta)|_{y=x} = 1. \qquad (5)$$

证　由条件1)知有$\varphi_j(x,y) \in C^\infty$使

$$\varphi(x,y,\theta) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x,y)\theta_j, \qquad (6)$$

由条件2)及(6)知当且仅当$y=x$时有

$$\varphi_j(x,y)=0,\quad j=1,\cdots,n,$$

故$\varphi(x,x,\theta)=0$。对x求导后得

$$\varphi'_y|_{y=x}=-\varphi'_x|_{y=x}. \tag{7}$$

据位相函数的定义知有：

$$\varphi'_{x\ y,\theta}=(\varphi'_x,\varphi'_y,\varphi'_\theta)\neq(0,\cdots,0),\quad \theta\neq 0$$

把$y=x$代入上式，利用条件2)及(7)，得：

$$\varphi'_x|_{y=x}\neq 0,\quad \theta\neq 0$$

这表明下列关于$\theta_1\cdots,\theta_n$的线性齐次方程组：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial x_1}\Big|_{y=x}\theta_j=0;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial x_n}\Big|_{y=x}\theta_j=0\end{cases}$$

只有零解$\theta=(\theta_1,\ \cdots,\ \theta_n)=0$，故相应的系数行列式不为零，即

$$\det\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}\right)\Big|_{y=x}\neq 0. \tag{8}$$

另一方面，对邻近于对角集$\triangle$的(x,y)，有

$$\varphi_j(x,y)=\varphi_j(x,y)-\varphi_j(y,y)$$

$$=\int_0^1\frac{d}{dt}\varphi_j(y+t(x-y),y)dt$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}(y+t(x-y),\ y)dt(x_k-y_k),$$

即：

$$\varphi_j(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_{kj}(x,y)(x_k-y_k); \tag{9}$$

$$\varphi_{kj}(x,y)=\int_0^1\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}(y+t(x-y),y)dt\in C^\infty(\Omega').$$

Ω'为$\triangle$的某邻域。显然有

$$\varphi_{kj}|_{y=x}=\left.\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}\right|_{y=x}=\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\partial\theta_j}\right|_{y=x}. \tag{10}$$

用$W(x,y)$记方阵$(\varphi_{kj}(x,y))$，则由(8)及(10)知，存在$X\times X$中对角集$\triangle$的邻域Ω，使当$(x,y)\in\Omega$时，

$$\det W(x,y)\neq 0,\ (x,y)\in\Omega,$$

记W的逆方阵为

$$\psi(x,y)=W(x,y)^{-1},\ (x,y)\in\Omega. \tag{11}$$

由(6)及(9)得

$$\varphi(x,y,\theta)=\sum_{j,k=1}^{n}\varphi_{kj}(x,y)(x_k-y_k)\theta_j$$

$$=((x-y),\ W(x,y)\theta). \tag{12}$$

令$W(x,y)\theta=\xi$，即$\theta=\psi(x,y)\xi$，由(12)即得(4)：

$$\varphi(x,y,\psi(x,y)\xi)=(x-y,\xi).$$

又由(10)及(11)有

$$\psi(x,y)|_{y=x}=\varphi''_{x,\theta}(x,y,\theta)|_{y=x}$$

$$=\psi(x,x)W(x,x)=I. \tag{13}$$

I为$n\times n$单位方阵。由(13)即得(15)。

定理1的证明 把(2)写成标准形式

$$A_1u(x)=\iint e^{i\varphi(x,y,\theta)}a_1(x,y,\theta)u(y)dyd\theta; \tag{2'}$$

$$\varphi(x,y,\theta)=(\kappa_1(x)-\kappa_1(y),\theta); \tag{14}$$

$$Q_1(x,y,\theta)=a(\kappa_1(x),\kappa_1(y),\theta)|\det\kappa_1'(y)|$$
$$\in S^m_{\rho,\delta}(X\times X\times R_n), \qquad (15)$$
φ显然满足引理 1 的全部条件。故存在ψ及Ω如上述，使式 (4) 成立。

取$\tau(x,y)\in C^\infty(X\times X)$，$\mathrm{supp}\,\tau\subset\Omega$，使$\tau$在对角集△的某邻域$\Omega_1\subset\Omega$中取值 1 。记
$$a^{(1)}=\tau a_1,\ a^{(2)}=(1-\tau)a_1,$$
则$a_1=a^{(1)}+a^{(2)}$，于是A_1相应地分解为$A_1=A^{(1)}+A^{(2)}$.

由于$A^{(2)}$的振幅$a^{(2)}$在对角△的邻域Ω_1中恒等于零，据条件2)及3.2.1定理 1 知$K_{A^{(2)}}\in C^\infty(X\times X)$，随之$A^{(2)}\in L^{-\infty}(X)\subset L^m_{\rho,\delta}(X)$。故剩下只须证明$A^{(1)}$属于$L^m_{\rho,\delta}(X)$。在
$$A^{(1)}u(x)=\iint e^{i\varphi(x,y,\theta)}a^{(1)}(x,y,\theta)u(y)dyd\theta$$
中作变换
$$x'=x,\ y'=y,\ \xi=\psi^{-1}\theta,(x,y)\in X\times X,\ \theta\in R_n, \qquad (16)$$
应用引理 1 可得
$$A^{(1)}u(x)=\iint e^{i(x-y,\xi)}a^{(1)}(x,y,\psi(x,y)\xi)|\det\psi(x,y)|u(y)|u(y)dyd\theta. \qquad (17)$$
记
$$b(x,y,\xi)=a^{(1)}(x,y,\psi(x,y)\xi)|\det\psi(x,y)|$$
$$\equiv\tau(x,y)|\det\psi|a_1(x,y,\psi\xi).$$
为证$b\in S^m_{\rho,\delta}(X\times X\times R_n)$，注意有$\mathrm{supp}\,\tau\subset\Omega$，而在$\Omega$中$\det\psi(x,y)$不变号，故$b\in C^\infty(X\times X\times R_n)$且$\mathrm{supp}_{x,y}b\subset\Omega$。于是只须证$a^{(1)}(x,y,\psi(x,y)\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times R_n)$。

注意(16)所确定的映射f是Ω到自身的微分同胚，故其逆

f^{-1}亦然，且满足3.1.3引理2的条件b)，故确有

$$b(x,y,\xi)=(a^{(1)}\circ f^{-1})(x,y,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times R_n)。$$

综合上述所证，知$A_1\in L^m_{\rho,\delta}(X)$。

推论1 设$A\in L^m_{\rho,\delta}(X)$，$1-\rho\leqslant\delta<\rho$。$\kappa$为$X\to X'$的微分同胚，则由(1)确定的算子$A_1\in L^m_{\rho,\delta}(X')$。

3.4.2 符征的变换公式

为建立A_1的符征σ_{A_1}及A的符征σ_A间的联系，求出σ_{A_1}的渐近展式，须先证明两个引理。

引理2 设向量函数$w(x)=(w_1(x),\cdots,w_n(x))\in C^\infty(X)$，$x^0\in X$是$w$的二阶零点，即：$D^\beta_x w|_{x=x^0}=0$，$|\beta|=0,1$，则$D^\alpha_x e^{i(w(x),\eta)}|_{x=x^0}$是$\eta$的次数$\leqslant\dfrac{|\alpha|}{2}$的多项式。

证 当$|\alpha|=0$时，$e^{i(w(x^0),\eta)}=1$。引理成立。

应用数学归纳法，设$|\alpha|\leqslant k$时命题真。当$|\alpha|=k+1$时，令$\alpha=\alpha'+\beta$，$|\alpha'|=k$，$|\beta|=1$，则有

$$D^\alpha_x e^{i(w(x),\eta)}|_{x=x^0}=D^{\alpha'}_x[e^{i(w(x),\eta)}(iD^\beta_x w(x),\eta)]|_{x=x^0}$$

$$=\sum_{\gamma+\delta=\alpha'}\frac{\alpha'!}{\gamma!\delta!}[D^\gamma_x e^{i(w(x),\eta)}]_{x=x^0}(iD^{\delta+\beta}_x w(x),\eta)_{x=x^0},$$

当$|\delta+\beta|\leqslant1$时，和式中的第二个因子为零，所以只须考虑$|\delta+\beta|>1$的项，即$|\delta|\geqslant1$的项。由于$|\gamma+\delta|=|\alpha'|=k$，知$|\gamma|\leqslant k-1$。据归纳法假定，和式中第一个因子都是$\eta$的次数$\leqslant\dfrac{k-1}{2}$的多项式。第二个因子显然都是次数$\leqslant1$的多项式。故和式中每一项都是关于$\eta$的次数$\leqslant\dfrac{k-1}{2}+1=\dfrac{k+1}{2}=\dfrac{|\alpha|}{2}$的多项

式。引理 2 得证。

引理3 设$P(x, D)=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$是系数属 $C^\infty(X)$ 的m阶线性微分算子，则有如下的推广的Leibniz公式

$$P(x, D)(uv)=\sum_{|\alpha|\leq m} P^{(\alpha)}(x, D)u\cdot\frac{D^\alpha v}{\alpha!},$$

$$\forall u,v\in C^m(X), \tag{18}$$

其中$P^{(\alpha)}(x,D)$由$P^{(\alpha)}(x,\xi)=\partial_\xi^\alpha P(x,\xi)$换$\xi$为$D$而得。

证 这个公式有多种证法。这里用拟微分算子给出一个较简单的证明。

可先对$u,v\in C_0^\infty(X)$的情形验证(18)；而当$u, v\in C^\infty(X)$时，取 $\varphi\in C_0^\infty(X)$，使φ在任一固定紧集$K\subset X$上取值 1，令$u_1=\varphi u,v_1=\varphi v$,代入(18)知此式对 u及v 在K上成立。由K的任意性知(18)在整个X中成立。最后，对于$C^m(X)$中的u,v，可用其光滑化$\psi_\varepsilon * u,\psi_\varepsilon * v\in C^\infty(X)$逼近，这里 $\psi_\varepsilon(x)=\psi(\varepsilon x)$，$\psi(x)\in C_0^\infty(X)$，$\int\psi(x)dx=1$。参看2.3.3。

因$u,v\in C_0^\infty(X)$，其Fourier变换$\hat{u}(\xi)$，$\hat{v}(\xi)$存在且关于ξ急降，故下列演算过程是合理的

$$P(x, D)(uv)(x)=\int e^{i\langle x,\xi\rangle}P(x,\xi)\widehat{uv}(\xi)d\xi$$

$$=\int e^{i\langle x,\xi\rangle}P(x,\xi)(\hat{u}*\hat{v})(\xi)d\xi$$

$$=\iint e^{i\langle x,\xi\rangle}P(x,\xi)\,\hat{u}(\xi-\eta)\,\hat{v}(\eta)d\eta d\xi$$

$$=\iint e^{i\langle x,\zeta+\eta\rangle}P(x,\zeta+\eta)\,\hat{u}(\zeta)\,\hat{u}(\eta)d\eta d\zeta.$$

这里用到代换$\zeta=\xi-\eta$。把$P(x,\zeta+\eta)$对η展开得

$$P(x, D)(uv)(x)$$

$$= \iint e^{i(x, \zeta+\eta)} \sum_{|\alpha| \leq m} P^{(\alpha)}(x, \zeta) \frac{\eta^\alpha}{\alpha!} \hat{u}(\zeta) \hat{v}(\eta) d\eta đ\zeta$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq m} \int e^{i(x, \zeta)} P^{(\alpha)}(x, \zeta) \hat{u}(\zeta) đ\zeta \int e^{i(x, \eta)} \frac{1}{\alpha!} \widehat{D^\alpha v}(y) d\eta$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq m} P^{(\alpha)}(x, D) u(x) \frac{D^\alpha v(x)}{\alpha!},$$

故(18)成立。

定理 2 给定微分同胚 $\kappa: X \to X_1$ 及适拟微分算子，$A \in L^m_{\rho,\delta}(X)$，且$1-\rho \leqslant \delta < \rho$。设算子$A_1$由式(1)确定，则有

$$\sigma_{A_1}(y, \eta)|_{y=\kappa(x)} \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \sigma_A^{(\alpha)}(x,$$

$$^t\kappa'(x)\eta) D_z^\alpha e^{i(\kappa_x''(z), \eta)}|_{z=x} \tag{19}$$

$$\sigma_A^{(\alpha)}(x, \xi) = \partial_\xi^\alpha \sigma_A(x, \xi);$$

$$\kappa_x''(z) = \kappa(z) - \kappa(x) - \kappa'(x)(z-x), \tag{19'}$$

而κ'则为变换κ的Jacobi方阵。

证 先注意 $z=x$ 是 $\kappa_x''(z)$ 的二阶零点。由引理 2 知 $D_z^\alpha e^{i(\kappa_x''(z), \eta)}|_{z=x} \in S^{\frac{|\alpha|}{2}}$。故(19)右边的通项属于

$$S_{\rho,\delta}^{m-(\rho-\frac{1}{2})|\alpha|}.$$

因$1-\rho \leqslant \delta < \rho$，有$\rho > \frac{1}{2}$，于是渐近展式（19）有意义，即：

$$m - \left(\rho - \frac{1}{2}\right)|\alpha| \to -\infty (|\alpha|) \to +\infty).$$

取σ_A 作为A的振幅代入(2)，经变换(16)得：

$$A_1u(x)=\iint e^{i(x-y,\eta)}\sigma_A(\kappa_1(x),\psi(x,y)\eta)G(x,y)\,dy\,d\!\!\!{}^{-}\eta, \tag{20}$$

$$G(x,y)=\det\kappa_1'(x)\det\psi(x,y)|,\qquad \kappa_1=\kappa^{-1}.$$

据3.3.4定理7知

$$\sigma_{A_1}(x,y)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\eta^\alpha D_y^\alpha[\sigma_A(\kappa_1(x),$$

$$\psi(x,y)\eta)G(x,y)]|_{y=x}$$

$$=\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}D_y^\alpha[G(x,y)\partial_\eta^\alpha\sigma_A(\kappa_1(x),\psi(x,y)\eta)]|_{y=x}$$

$$=\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}D_y^\alpha[G_\alpha(x,y)\sigma_A^{(\alpha)}(\kappa_1(x),\psi(x,y)\eta)]|_{y=x},$$

其中$G_\alpha(x,y)$只依赖于变换κ，而与算子A无关。

现在计算

$$D_y^\alpha[G_\alpha(x,y)\sigma_A^{(\alpha)}(\kappa_1(x),\psi(x,y)\eta)]$$

$$=\sum_{\gamma+\delta=\alpha}\frac{\alpha!}{\gamma!\delta!}D_y^\gamma G_\alpha(x,y)D_y^\delta\sigma_A^{(\alpha)}(\kappa_1(x),\psi(x,y)\eta)$$

$$=\sum_{\gamma+\delta=\alpha}\frac{\alpha!}{\gamma!\delta!}P_{\alpha,\delta}(x,y,\eta)\sigma_A^{(\delta+\alpha)}(\kappa_1(x),\psi(x,y)\eta),$$

其中$P_{\alpha,\delta}\in C^\infty$且关于$\eta$为次数$\leqslant|\delta|$的多项式，它们完全由变换$\kappa$确定，而不依赖于$A$。于是有

$$\sigma_{A_1}(x,\eta)\sim\sum_\alpha\sum_{\gamma+\delta=\alpha}\frac{\alpha!}{\gamma!\delta!}P_{\alpha,\delta}(x,x,\eta)\sigma_A^{(\delta+\alpha)}(\kappa_1(x),$$

$$\psi(x,x)\eta)\sim\sum_\beta\sum_\alpha C_{\beta,\delta}(x,\xi)\sigma_A^{(\beta)}(\kappa_1(x),\psi(x,x)\eta).$$

注意$|\beta|=|\alpha+\delta|\leqslant2|\alpha|$，故$|\delta|=|\beta|-|\alpha|\leqslant|\beta|-\frac{1}{2}|\beta|=$

$\frac{1}{2}|\beta|$，于是有

$$\sigma_{A_1}(x, \eta) \sim \sum_{\beta} \frac{1}{\beta!} C_{\beta}(x, \eta) \sigma_A^{(\beta)}(\kappa_1(x), \psi(x, x)\eta). \quad (21)$$

这里$C_{\beta}(x, \eta)$仅由κ确定，而与A无关，且为系数属于$C^{\infty}(X)$的多项式(关于η)，其次数$\leqslant \frac{|\beta|}{2}$。

在(21)中换x为$\kappa(x)$，并利用(13)，得

$$\psi(x, x) = [{}^t\kappa_1'(x)]^{-1} = {}^t[\kappa_1'(x)^{-1}].$$

由(21)及Jacobi矩阵的性质知

$$\psi(x', x')|_{x'=\kappa(x)} = {}^t[\kappa_1'(x')^{-1}]|_{x'=\kappa(x)} = {}^t\kappa'(x),$$

故有

$$\sigma_{A_1}(\kappa(x), \eta) \sim \sum_{\beta} \frac{g_{\beta}(x, \eta)}{\beta!} \sigma_A^{(\beta)}(x, {}^t\kappa'(x), \eta), \quad (22)$$

其中$g_{\beta}(x, \eta) = C_{\beta}(x', \eta)|_{x'=\kappa(x)}$仍然是$\eta$的不超过$\frac{|\beta|}{2}$次的多项式，其系数属于$C^{\infty}(X)$，且$g_{\beta}$完全由$\kappa$确定，与$A$无关。故可取$A$为线性偏微分算子，直接求出形如(22)的渐近展式，用来确定$g_{\beta}(x, \eta)$。

事实上，设$A = P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant p} a_{\alpha}(x) D^{\alpha}$，$a_{\alpha}(x) \in C^{\infty}(X)$，

则有

$$\begin{aligned}
\sigma_{A_1}(x', \eta)|_{x'=\kappa(x)} &= [e^{-i(x', \eta)} A_1 e^{i(y, \eta)}]|_{x'=\kappa(x)} \\
&= e^{-i(\kappa(x), \eta)} (A_1 e^{i(y, \eta)})_{x'=\kappa(x)} \\
&= e^{-i(\kappa(x), \eta)} A e^{i(\kappa(x), \eta)} \\
&= e^{-i(\kappa(z), \eta)} [P(z, D_z) e^{i(\kappa(z), \eta)}]|_{z=x}. \quad (23)
\end{aligned}$$

由(19′)有

$$\kappa(z)=\kappa(x)+\kappa'(x)(z-x)+\kappa_x''(z);$$

$$(\kappa(z),\eta)=(\kappa(x),\eta)+(z-x,\ {}^t\kappa'(x)\eta)+(\kappa_x''(z),\ \eta),$$

代入(23)，并应用推广的Leibniz公式(18)，得

$$\sigma_{A_1}(y,\eta)|_{y=\kappa(x)}=e^{-i(x,\ {}^t\kappa(x)\eta)}\{P(z,D_z)$$

$$\cdot[e^{i({}^t\kappa'(x)\eta,\ z)}e^{i(\kappa_x''(z),\ \eta)}]\}|_{z=x}$$

$$=e^{-i(x,\ {}^t\kappa'(x)\eta)}\Big[\sum_{|\alpha|\leq p}P^{(\alpha)}(z,D_z)$$

$$\cdot e^{i({}^t\kappa'(x)\eta,\ z)}\cdot\frac{1}{\alpha!}D_z^\alpha e^{i(\kappa_x''(z),\ \eta)}\Big]\Big|_{z=x}$$

$$=e^{-i(x,\ {}^t\kappa'(x)\eta)}\sum_{|\alpha|\leq p}P^{(\alpha)}(x,{}^t\kappa'(x)\eta)$$

$$\cdot e^{i({}^t\kappa'(x)\eta,\ x)}\frac{1}{\alpha!}D_z^\alpha e^{i(\kappa_x''(z),\ \eta)}|_{z=x}$$

$$=\sum_{|\alpha|\leq p}\frac{1}{\alpha!}\sigma_A^{(\alpha)}(x,{}^t\kappa'(x)\eta)[D_z^\alpha e^{i(\kappa_x''(z),\ \eta)}]|_{z=x}$$

$$=\sum_{|\alpha|\leq p}\frac{g_\alpha(x,y)}{\alpha!}\sigma_A^{(\alpha)}(x,{}^t\kappa'(x)\eta).$$

由于p可为任意正整数，故对每个α有

$$g_\alpha(x,y)=[D_z^\alpha e^{i(\kappa_x''(z),\ \eta)}]|_{z=x}. \tag{24}$$

把它们代入(22)，即得(19)。

推论2 $\sigma_{A_1}(y,\eta)-\sigma_A(\kappa_1(y),[{}^t\kappa_1'(y)]^{-1}\eta)$

$$\in S_{\rho,\delta}^{m-2(\rho-\frac{1}{2})}(X_1\times\boldsymbol{R}_n). \tag{25}$$

证 由(24)可直接算出 $g_0\equiv1$，且当$|\beta|=1$时有 $g_\beta\equiv0$；当$|\beta|=2$时，$g_\beta\equiv D_x^\beta(i\kappa(x),\eta)$。利用这些结果及(19)，即得(25)。

3.4.3 流形上的拟微分算子

设M为n维C^∞流形，用$C^\infty(M)$及$C_0^\infty(M)$分别表示M上的无穷可微函数空间及具紧台的无穷可微函数空间。设给定线性映射

$$A: C_0^\infty(M)\to C^\infty(M),$$

若X为M中的域（不必是连通的），κ为微分同胚：$X\to X_1\subset \boldsymbol{R}^n$，则可换图

$$\begin{array}{ccc}
C_0^\infty(X) & \xrightarrow{\quad A\quad} & C^\infty(X) \\
\uparrow{\scriptstyle \kappa^*} & & \uparrow{\scriptstyle \kappa^*} \\
C_0^\infty(X_1) & \xrightarrow{\quad A_1\quad} & C^\infty(X_1)
\end{array}$$

单值地确定算子A_1. 注意图中的算子A本应为算子$r_x\circ A\circ I_x$，这里I_x为自然嵌入：$C_0^\infty(X)\to C_0^\infty(M)$，$r_x$为自然缩射$C^\infty(M)\to C^\infty(X)$。为简单计，仍记为$A$。

定义 1 若对任一微分同胚κ：$X\to X_1$，如上确定的算子A_1为$X_1\subset\boldsymbol{R}^n$中的$\psi$DO，则称算子：$A: C_0^\infty(M)\to C^\infty(M)$为流形$M$上的拟微分算子。

定理 1 表明：当$1-\rho\leqslant\delta<\rho$时，在域$X\subset\boldsymbol{R}^n$中定义的$\psi$DO确是流形$X$上的$\psi$DO。

由3.1.3引理 2 知当时$1-\rho\leqslant\delta<\rho$时，符征类$S^m_{\rho,\delta}(T^*M)$及相应的算子类$L^m_{\rho,\delta}(M)$对于光滑流形$M$都有意义；而本节推论 1 更表明：作为商空间$S^m_{\rho,\delta}(T^*M)/S^{m-\frac{1}{2}(\rho-\frac{1}{2})}_{\rho,\delta}(T^*M)$中的元，主符征有确切意义。

为了不致涉及过多概念，对流形上的拟微分算子只作如上的简单介绍。

3.5 有界性定理

3.5.1 基本有界性定理

设$A\in L^{m}_{\rho,\delta}(X)$，其符征为$\sigma_A(x,\xi)$。现在考虑问题：当$\sigma_A$满足什么条件时，$A$可延拓为$L_2(X)\to L_2(X)$的有界线性算子？为解决这个问题，先作一些预备性的讨论。

引理1 设A是$C_0^\infty(X)$到$C_0^\infty(X)$的线性映射，则A可延拓为$L_2(X)$到$L_2(X)$的有界线性映射的充要条件是：存在常数$C>0$，使

$$\|Au\|\leqslant C\|u\|,\quad \forall u\in C_0^\infty(X); \tag{1}$$

$$\|u\|^2=\int_X u\overline{u}\,dx.$$

证 必要性是显然的。充分性可如下证明。因$C_0^\infty(X)$为$L_2(X)$的稠集，故对每个$u\in L_2(X)$，存在列$\{u_j\}\subset C_0^\infty(X)$，使$\|u_j-u\|\to 0(j\to\infty)$。于是

$$\begin{aligned}\|Au_j-Au_k\|&\leqslant C\|u_j-u_k\|\\&\leqslant C(\|u_j-u\|+\|u_k-u\|)\to 0\quad (j,k\to\infty),\end{aligned}$$

故$\{Au_j\}$是完备空间$L_2(X)$的基本列，而有极限$v=\lim\limits_{j\to\infty}Au_j$存在。容易证明$v$由$u$所唯一确定，而不依赖于逼近列$\{u_j\}$的选择。于是可定义$Au=v$，且显然有$\|Au\|\leqslant C\|u\|$。故充分性得证。

引理2 设C为适ψDO，$C\in L^{m}_{\rho,\delta}(X)$，且$C^*=C$，即$C$为自伴算子，则有

$$I_m\sigma_c(x,\xi)\in S^{m-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(X\times R_n) \tag{2}$$

证　据3.3.5式(27)有

$$\sigma_{c*}-\overline{\sigma_c}\in S^{m-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta},$$

故 $I_m\sigma_c=\frac{1}{2i}(\sigma_c-\overline{\sigma_c})=\frac{1}{2i}(\sigma_{c*}-\overline{\sigma_c})\in S^{m-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}$，这里用到自伴性。

引理3 设$a(x,\xi)\in S^0_{\rho,\delta}(X\times R_n)$，且对每个紧集$\kappa\subset X$，存在常数$d(\kappa)>0$，$r(\kappa)>0$，使

$$|a(x,\xi)|\geqslant d(\kappa),\ x\in\kappa,\ |\xi|\geqslant r(\kappa),\tag{3}$$

则对任何实数λ，存在常数$C(\alpha,\beta,\kappa,\lambda)>0$，使得

$$|D^\alpha_\xi D^\beta_x[a(x,\xi)]^\lambda|\leqslant C(\alpha,\beta,\kappa,\lambda)(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$
$$x\in\kappa,\ |\xi|\geqslant r(\kappa).\tag{4}$$

证　记$|\alpha+\beta|=k$，对k应用数学归纳法。

当$|k|=0$时，由于$a\in S^0_{\rho,\delta}$及(3)，知有$C(\kappa)>0$，使

$$d(\kappa)\leqslant|a(x,\xi)|\leqslant C(\kappa),\ x\in\kappa,\ |\xi|\geqslant r(\kappa),$$

于是

$$|[a(x,\xi)]^\lambda=|a(x,\xi)|^\lambda$$
$$\leqslant(c^\lambda(\kappa)+d^\lambda(\kappa))=C(0,0,\kappa,\lambda),$$

故(4)当$k=0$时成立。设$k\leqslant p$时，(4)成立。当$k=p+1$时，不妨设$\alpha=\alpha'-\alpha''$，其中$|\alpha'+\beta|=p$，而$\alpha''=(1,0,\cdots,0)$；或设$\beta=\beta'+\beta''$，$|\alpha+\beta'|=p$，$\beta''=(1,0,\cdots,0)$，证明是类似的。

当$x\in\kappa$，$|\xi|\geqslant r(\kappa)$时，有

$$|D^\alpha_\xi D^\beta_x a^\lambda|=|D^{\alpha'}_\xi D^\beta_x D_{\xi_1}a^\lambda|$$
$$=|\lambda||D^{\alpha'}_\xi D^\beta_x[a^{\lambda-1}(x,\xi)D_\xi a(x,\xi)]|$$

在上式右边应用Leibniz公式，得

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta a^\lambda(x,\xi)|\leqslant C(\alpha,\beta,\lambda)\sum_{\gamma_1+\gamma_2=\beta}|D_\xi^{\varepsilon_1}D_x^{\gamma_1}[a^{\lambda-1}(x,\xi)]D_\xi^{\varepsilon_2+\alpha_2}D_x^{\gamma_2}a(x,\xi)|$$

$$\leqslant C_K(\alpha,\beta,\kappa,\lambda)\sum(1+|\xi|)^{-\rho|\varepsilon_1|+\delta|\gamma_1|}(1+|\xi|)^{-\rho|\varepsilon_2+1|+\delta|\gamma_2|}$$

$$\leqslant C'(\alpha,\beta,\kappa,\lambda)(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

故引理3成立。

引理4 设$C\in L^0_{\rho,\delta}(X)$为适ψDO，且$\rho>\delta$，$\rho>0,\delta<1$，并满足条件：

1）$C=C^*$；（5）

2）对每个紧集$\kappa\subset X$，有

$$\lim_{\xi\to\infty}\inf_{\substack{x\in K\\|\xi|\geq t}}\mathrm{Re}\sigma_C(x,\xi)>0,\tag{6}$$

则存在适拟微分算子$B\in L^0_{\rho,\delta}(X)$，使

$$R\equiv B^*B-C\in L^{-\infty}(X).\tag{7}$$

证 下面应用拟微分算子理论中常用的标准程序来寻求B，基本思想是逐次逼近。这种逼近法是建立在符征的渐近展式理论上的，而避免了经典逐次逼近法中关于收敛性的复杂讨论。这个程序的主要步骤如下：

第一步：求$B_0\in L^0_{\rho,\delta}(X)$，使

$$R_0=B_0^*B_0-C\in L^{-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(X);\tag{8}$$

第二步：求$B_1\in L^0_{\rho,\delta}(X)$，使

$$R_1=(B_0+B_1)^*(B_0+B_1)-C\in L^{-2(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(X);\tag{9}$$

第三步：一般地，逐次求得$B_0,B_1,\cdots,B_N,\cdots$，使

$$R_N=(B_0+\cdots+B_N)^*(B_0+\cdots+B_N)-C\in L^{-(N+1)(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(X);\tag{10}$$

于是取$b\sim\sum_j\sigma_{B_j}$，则以b为符征的适拟微分算子B即为所求。

下面给出详细的构造及证明过程。

(8)显然等价于$\sigma_{B_0*B_0-C}\in S_{\rho,\delta}^{-(\rho-\delta)}$。由引理2知后者又等价于$\mathrm{Re}\sigma_{B_0*B}-\mathrm{Re}\sigma_C\in S_{\rho,\delta}^{-(\rho-\delta)}$。据3.3.4式(27)及(13)可算出

$$\sigma_{B_0*B_0}=|\sigma_{B_0}|^2+r,\ r\in S_{\rho,\delta}^{-(\rho-\delta)}.$$

记$b=\sigma_{B_0}$，于是B_0的寻求归结为求b_0，使有

$$|b_0|^2-\mathrm{Re}\sigma_C\in S_{\rho,\delta}^{-(\rho-\delta)};\tag{11}$$

$$b_0\in S_{\rho,\delta}^0.\tag{12}$$

b_0可如下构造.取X的单位分解$\{h_j(x)\}$，记$K_j=\mathrm{supp}h_j$.由(6)知存在常数$d(K_j)>0$及$r(K_j)>0$，使

$$\mathrm{Re}\sigma_C(x,\xi)>d(K_j),\ x\in K_j,\ |\xi|>r(K_j),\quad j=1,2,\cdots,\tag{13}$$

且恒可取$r(K_{j+1})>r(K_j)$，$j=1,2,\cdots$。

取一列实值函数$\psi_j(\xi)\in C^\infty(\boldsymbol{R}_n)$，使具性质

$$\psi_j(\xi)\geqslant0,\ \psi_j(\xi)=\begin{cases}0, & |\xi|\leqslant r(K_{j+1});\\ 1, & |\xi|>r(K_{j+2});\end{cases}\quad j=1,2,\cdots.\tag{14}$$

令

$$b_0(x,\xi)=\left[\sum_j\psi_j^2(\xi)h_j(x)\mathrm{Re}\sigma_C(x,\xi)\right]^{\frac{1}{2}},\tag{15}$$

据(13)、(14)及引理3$\left(\text{取}\lambda=\frac{1}{2}\right)$知$b_0\in S_{\rho,\delta}^0$。此外，

$$|b_0|^2-\mathrm{Re}\sigma_C=(b_0+\sqrt{\mathrm{Re}\sigma_C})(b_0-\sqrt{\mathrm{Re}\sigma_C})$$

$$=(b_0+\sqrt{\mathrm{Re}\sigma_C})\sum_j(\psi_j(\xi)-1)h_j(x)\sqrt{\mathrm{Re}\sigma_C}$$

当$x\in K$时，上式的和为有限项，且$\psi_j(\xi)-1\in C_0^\infty(R_n)$，故存在$r(K)$，当$x\in K$，$|\xi|>r(K)$时，$|b_0|^2-\mathrm{Re}\sigma_C\equiv 0$，由此知$|b_0|^2-\mathrm{Re}\sigma_C\in S^{-\infty}\subset S_{\rho,\delta}^{-(\rho-\delta)}$。据3.3.4推论1，知存在适拟微分算子$B_0$，使$\sigma_{B_0}-b_0\in S^{-\infty}$。显然，$\sigma_{B_0}$也满足要求（11）及(12)。于是$B_0$确为所求。

设当 $j=0,1,\cdots,l-1$ 时，已求得适拟微分算子

$B_j\in L_{\rho,\delta}^{-j(\rho-\delta)}(X)$，使 $R_{l-1}\equiv\left(\sum_{j=0}^{l-1}B_j\right)^*\sum_{j=0}^{l-1}B_j-C\in$

$L_{\rho,\delta}^{-l(\rho-\delta)}(X)$。今证明：存在适拟微分算子 B_l，具性质

$$B_l\in S_{\rho,\delta}^{-l(\rho-\delta)}(X);\tag{16}$$

$$\begin{aligned}R_l&\equiv(B_0+\cdots+B_l)^*(B_0+\cdots+B_l)-C\\&\in L_{\rho,\delta}^{-(l+1)(\rho-\delta)}(X)。\end{aligned}\tag{17}$$

为此可注意，对任一适拟微分算子$B_l\in L_{\rho,\delta}^{-l(\rho-\delta)}$，有

$$\begin{aligned}R_l&=R_{l-1}+B_l^*(B_0+\cdots+B_{l-1})\\&\quad+(B_0+\cdots+B_{l-1})^*B_l+B_l^*B_l\\&\equiv R_{l-1}+B_l^*B_0+B_0^*B_l\ (\mathrm{mod}L^{-(l+1)(\rho-\delta)}),\end{aligned}$$

故只须构造适拟微分算子B_l，使满足(16)及如下要求

$$B_l^*B_0+B_0^*B_l+R_{l-1}\in L_{\rho,\delta}^{-(l+1)(\rho-\delta)}(X)。\tag{17'}$$

后一要求等价于条件

$$\sigma_{B_l^*B_0}+\sigma_{B_0^*B_l}+\sigma_{R_{l-1}}\in S_{\rho,\delta}^{-(l+1)(\rho-\delta)}。\tag{18}$$

利用渐近展式并注意 $\sigma_{B_0}\equiv b_0(\mathrm{mod}S^{-\infty})$，且$b_0$取实值，于是(18)等价于

$$2b_0\mathrm{Re}\sigma_{Bl}+\sigma_{R_{l-1}}\in S_{\rho,\delta}^{-(l+1)(\rho-\delta)}。$$

因显然有$R^*_{l-1}=R_{l-1}$，且$R_{l-1}\in L_{\rho,\delta}^{-l(\rho-\delta)}$，据引理2知有：

$$\sigma_{R_{l-1}}\equiv \mathrm{Re}\sigma_{R_{l-1}}\quad (\mathrm{mod} S_{\rho,\delta}^{-(l+1)(\rho-\delta)})$$

记$b_l=\sigma_{Bl}$，于是问题归结为求b_l，使

$$b_l\in S_{\rho,\delta}^{-l(\rho-\delta)}; \tag{19}$$

$$2b_0 b_l+\mathrm{Re}\sigma_{R_{l-1}}\in S_{\rho,\delta}^{-(l+1)(\rho-\delta)}. \tag{20}$$

由于$b_0\in S^0_{\rho,\delta}$，且由(15)知$b_0(x,\xi)$满足引理 3 的条件，故可仿照第一步的构造法，取

$$b_l=\sum_j \psi_j^*(\xi)h_j(x)\cdot(b_0)^{-1}\left(\frac{-1}{2}\mathrm{Re}\sigma_{R_{l-1}}\right),$$

其中ψ_j^*为类似于ψ_j的函数。不难直接验证 b_l满足要求(19)及(20)。作适拟微分算子B_l，使$\sigma_{B_l}\equiv b_l(\mathrm{mod}S^{-\infty})$。于是$B_l$即为所需。

最后，由3.3.3定理 5 知存在$b\in S^0_{\rho,\delta}$，使

$$b\sim\sum_j\sigma_{B_j},$$

取适拟微分算子B，使其符征 $\sigma_B\equiv b(\mathrm{mod}S^{-\infty})$，则$B$即为引理所求的拟微分算子。事实上，对任何正整数$N$有

$$B^*B-C=\left(B-\sum_{j=0}^{N-1}B_j+\sum_{j=0}^{N-1}B_j\right)^*\left(B\right.$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{N-1}B_j+\sum_{j=0}^{N-1}B_j\right)-C$$

$$\equiv\left(\sum_{j=0}^{N-1}B_j\right)^*\sum_{j=0}^{N-1}B_j-C\ \ (\mathrm{mod}L_{\rho,\delta}^{-N(\rho-\delta)})$$

$$\equiv R_{N-1}\equiv 0(\mathrm{mod}L_{\rho,\delta}^{-N(\rho-\delta)}),$$

即$B^*B-C\in L_{\rho,\delta}^{-N(\rho-\delta)}$。由$N$的任意性知$B^*B-C\in L^{-\infty}$。

定理 1 设适拟微分算子 $A\in L^0_{\rho,\delta}(X)$，$0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$。若存在常数$M>0$，对每个紧集$K\subset X$，使

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{\substack{x\in K\\|\xi|\geqslant t}}|\sigma_A(x,\xi)|<M, \tag{21}$$

则存在具Hermite核$r(x,y)=\overline{r(y,x)}\in C^\infty(X\times X)$的积分算子$R$，使得

$$\langle Au,Au\rangle\leqslant M^2\langle u,u\rangle+\langle Ru,u\rangle,\ \forall u\in C_0^\infty(X); \tag{22}$$

$$\langle\varphi,\psi\rangle\equiv\int\varphi\overline{\psi}dx.$$

证 令$C=M^2I-A^*A$，这里I为恒等算子，则有$C^*=C$，且$\mathrm{Re}\sigma_C=M^2-|\sigma_A|^2+r_1$，$r_1\in S_{\rho,\delta}^{-(\rho-\delta)}$。由此得

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}\inf_{\substack{x\in K\\|\xi|\geqslant t}}\mathrm{Re}\sigma_C &\geqslant \lim_{t\to+\infty}\inf_{\substack{x\in K\\|\xi|\geqslant t}}(M^2-|\sigma_A|^2)\\
&\quad-\lim_{t\to+\infty}\inf_{\substack{x\in K\\|\xi|\geqslant t}}|r_1(x,\xi)|\\
&=\lim_{t\to+\infty}\inf_{\substack{x\in K\\|\xi|\geqslant t}}(M^2-|\sigma_A|^2)\\
&\geqslant M^2-(\lim_{t\to+\infty}\sup_{\substack{x\in K\\|\xi|\geqslant t}}|\sigma_A|)^2>0,
\end{aligned}$$

故适拟微分算子C满足引理 4 的条件。于是存在适拟微分算子$B\in L^0_{\rho,\delta}(X)$，使

$$R=B^*B-C\in L^{-\infty}(X)。$$

因此，R为具C^∞光滑核 $r(x,y)$ 的积分算子，且$R^*=R$，即$\overline{r(y,x)}=r(x,y)$为Hermite核。于是有

$$\begin{aligned}
\langle Au,Au\rangle&=\langle A^*Au,u\rangle=M^2\langle u,u\rangle+\langle Ru,u\rangle-\langle Bu,Bu\rangle\\
&\leqslant M^2\langle u,u\rangle+\langle Ru,u\rangle,\qquad\forall u\in C_0^\infty(X),
\end{aligned}$$

故(22)成立。

下面给出使(21)成立的一个充分条件。

引理5 设 $A\in L^0_{\rho,\delta}(X)$，$0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$，且$K_A$具紧台，则存在常数$M>0$，使对每个紧集$K\subset X$，有

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{\substack{x\in K\\|\xi|\geqslant t}}|\sigma_A(x,\xi)|<M. \tag{23}$$

证 首先指出，若K_A具紧台，则存在紧集$K_0\subset X$，使对所有的$u\in C^\infty(X)$，有$\operatorname{supp}Au\subset K_0$，即$A$映$C^\infty(X)$到$C_0^\infty(K_0)$，事实上，可取$K_0=\pi_1\operatorname{supp}K_A$，则$K_0$为$X$中紧集，且对任何$v\in C_0^\infty(X\setminus K_0)$，有$(\operatorname{supp}v\times X)\cap\operatorname{supp}K_A=\varnothing$，于是$(Au,v)=(K_A,uv)=0$，即$\operatorname{supp}Au\subset K_0$。其次，因

$$\sigma_A(x,\xi)=e^{-i\langle x,\xi\rangle}A(e^{i\langle\xi,y\rangle}),$$

故据上面所证，知有$\pi_1\operatorname{supp}\sigma_A\subset K_0$。又因$\sigma_A\in S^0_{\rho,\delta}$，有

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{\substack{x\in X\\|\xi|\geqslant t}}|\sigma_A(x,\xi)|\leqslant\sup_{\substack{x\in K_0\\\xi\in R_n}}|\sigma_A(x,\xi)|$$

$$\leqslant C(K_0)(1+|\xi|)^0=C(K_0)<C(K_0)+1=M.$$

定理2（基本有界性定理） 设$A\in L^0_{\rho,\delta}(X)$，$0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$，且$K_A$具紧台，则存在常数$C>0$，使

$$\|Au\|\leqslant C\|u\|,\quad\forall u\in C_0^\infty(X),$$

于是A可延拓为$L_2(X)\to L_2(X)$的连续线性算子。

证 记$K_i=\pi_i\operatorname{supp}K_A$，$i=1,2$.取定$\psi(x)\in C_0^\infty(X)$，使$\psi$在$K_2$的某个邻域中取值1，且$0\leqslant\psi\leqslant 1$。易知

$$Au=A(\psi u)+A[(1-\psi)u]=A(\psi u).$$

据引理4及引理5知有

$$\langle Au,Au\rangle=\langle A(\psi u),A(\psi u)\rangle$$

$$\leqslant M^2\langle\psi u,\psi u\rangle+\langle R\psi u,\psi u\rangle$$

$$=M^2\|\psi u\|^2+\iint r(x,y)\psi(y)\overline{\psi(x)}u(y)\overline{u(x)}\,dx\,dy$$

$$= M^2\|\psi u\|^2 + \iint r_1(x,y)u(y)\overline{u(x)}dxdy,$$

其中$r_1 = \overline{\psi(x)}\psi(y)r$。故得

$$\|Au\|^2 \leqslant M^2\|u\|^2 + \langle R_1 u, u\rangle, \quad \forall u \in C_0^\infty(X). \tag{24}$$

R_1为具Hermite核$r_1 \in C_0^\infty(X \times X)$的积分算子。于是有

$$\langle R_1 u, u\rangle = \iint r_1(x,y)u(y)\overline{u(x)}dxdy$$

$$\leqslant \left(\iint |r_1(x, y)|^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}}\|u\|^2$$

$$= C_1^2\|u\|^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(X),$$

代入(24)得

$$\|Au\| \leqslant \sqrt{M^2 + C_1^2}\|u\| = C\|u\|, \quad \forall u \in C_0^\infty(X),$$

故由引理 1 知A可延拓为由$L_2(X)$到其自身的连续线性算子。

3.5.2 紧性定理

引理6 存在$\tau(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，具性质：$\tau \geqslant 0$，$\int \tau dx = 1$，$0 \leqslant \widehat{\tau(\xi)} \leqslant 1$，这里$\widehat{\tau(\xi)}$为$\tau(x)$的Fourier变换。

证 取$\tau_0(x) \in C_0^\infty(X)$，使$\tau_0 \geqslant 0$，$\int \tau_0 dx = 1$。令

$$\tau(x) = \int \tau_0(x+y)\tau_0(y)dy,$$

则τ即为引理 6 所求。事实上，记 $\tau_1(x) = \tau_0(-x)$，则有 $\tau = \tau_0 * \tau_1$。故$\mathrm{supp}\,\tau \subset \mathrm{supp}\,\tau_0 + \mathrm{supp}\,\tau_1$，随之确有 $\tau \in C_0^\infty(X)$。$\tau \geqslant 0$是显然的，且$\int \tau(x)dx = \left(\int \tau_0(x)dx\right)^2 = 1$. 最后，为验证 $0 \leqslant \widehat{\tau(\xi)} \leqslant 1$，注意

$$\hat{\tau}(\xi)=\widehat{\tau_0 * \tau_1}=\hat{\tau}_0\cdot\hat{\tau}_1=\hat{\tau}_0\cdot\overline{\hat{\tau}_0}=|\tau_0|^2\geqslant 0;$$

$$\hat{\tau}(\xi)=|\hat{\tau}_0|^2=\left|\int e^{-i(x,\xi)}\tau_0(x)\,dx\right|^2$$

$$\leqslant\left(\int\tau_0(x)\,dx\right)^2=1,$$

故$\tau(x)$满足引理 6 的一切要求。

定理3 设$A\in L^0_{\rho,\delta}(X)$，$0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$，且$K_A$具紧台。若存在常数$M>0$，使对每个紧集$K\subset X$，有

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{\substack{x\in X\\|\xi|\geqslant t}}|\sigma_A(x,\xi)|<M, \tag{23}$$

则存在拟微分算子$A_1\in L^0_{\rho,\delta}(X)$，满足下列要求：

1) $A-A_1\in L^{-\infty}$;

2) K_{A_1}具紧台；

3) $\|A_1u\|\leqslant M\|u\|$，$\forall u\in C_0^\infty(X)$。 (25)

注1 由引理 5 知满足(23)的常数M必然存在，且(25)及(24)中的M是同一个常数。

证 取引理 6 中的函数$\tau(x)$，记

$$\tau_\varepsilon(x)=\tau\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\ u_\varepsilon(x)=u-\tau_\varepsilon * u;$$

$$A_\varepsilon u=Au_\varepsilon=Au-A(\tau_\varepsilon * u).$$

选常数$M_1>0$，使

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{\substack{x\in X\\|\xi|\geqslant t}}|\sigma_A(x,\xi)|<M_1<M,$$

换(24)中的M为M_1，并把u_ε代入得

$$\|A_\varepsilon u\|^2\leqslant M_1^2\|u-\tau_\varepsilon * u\|^2+\langle R_1(u-\tau_\varepsilon * u),\ u-\tau_\varepsilon * u\rangle, \tag{26}$$

其中R_1是具Hermite核$r_1(x,y)\in C_0^\infty(X\times X)$的积分算子。

由于

$$\|u_\varepsilon\|^2=(2\pi)^{-n}\|\widehat{u_\varepsilon}\|^2=(2\pi)^{-n}\|(1-\widehat{\tau_\varepsilon})\widehat{u}\|^2$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\|[1-\widehat{\tau}(\varepsilon\xi)]\widehat{u}(\xi)\|^2\leqslant\frac{1}{(2\pi)^n}\|\widehat{u}\|^2=\|u\|^2,$$

故据(26)有

$$\|A_\varepsilon u\|^2\leqslant M_1^2\|u\|^2+\langle R_\varepsilon u,u\rangle;\tag{27}$$

$$R_\varepsilon u\equiv R_1u_\varepsilon\equiv R_1(u-\tau_\varepsilon*u).$$

容易算出R_ε的核$r_\varepsilon(x,y)$为

$$r_\varepsilon(x,y)=\int[r_1(x,y)-r_1(x,y+\varepsilon s)]\tau(s)ds.$$

显然，当$\varepsilon>0$充分小时，$r_\varepsilon(x,y)\in C_0^\infty(X\times X)$，且有估计

$$|r_\varepsilon(x,y)|\leqslant C\varepsilon,\ C>0,$$

C为不依赖于(x,y)的常数。由此得

$$|\langle R_\varepsilon u,u\rangle|\leqslant C_1\varepsilon\|u\|^2,\qquad\forall u\in C_0^\infty(X),$$

代入(27)，得估式：

$$\|A_\varepsilon u\|^2\leqslant(M_1^2+C_1\varepsilon)\|u\|^2.$$

取$\varepsilon_1>0$充分小，使$M_1^2+C_1\varepsilon_1<M^2$，记$A_{\varepsilon_1}=A_1$，即得不等式(25)。

为证明性质1)及2)，记$T_{\varepsilon_1}u\equiv\tau_{\varepsilon_1}*u$.据3.3.3例4知$T_{\varepsilon_1}\in L^{-\infty}(\mathbf{R}^n)$. 由于$K_A$具紧台，故$A$可延拓为连续映射：$C^\infty(\mathbf{R}^n)\to C_0^\infty(X)$，于是$A-A_1=AT_{\varepsilon_1}\in L^{-\infty}(X)$。

最后，由$A_1=A-AT_{\varepsilon_1}$，经直接验证知 $\operatorname{supp}K_{A_1}$含于$\operatorname{supp}K_A$的$2\varepsilon_1$邻域(即所有距$\operatorname{supp}K_A$不超过$2\varepsilon_1$的点组成的集合)中。因$\operatorname{supp}K_A$为$X\times X$中紧集，故当取$\varepsilon_1$充分小时，$\operatorname{supp}K_{A_1}$也是紧集。

定理4（紧性定理） 设$A\in L^0_{\rho,\delta}(X)$，$0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$，且$K_A$具紧台，$A$的符征$\sigma_A$具性质

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{\substack{x\in X\\|\xi|\geq t}}|\sigma_A(x,\xi)|=0, \tag{28}$$

则A可延拓为由$L_2(X)$到$L_2(X)$的紧算子。

证 据条件(28)及定理2知，对每个正整数l，存在$A_l\in L^0_{\rho,\delta}(X)$，使$A-A_l\in L^{-\infty}(X)$，$K_{A_l}$具紧台，且

$$\|A_l u\|\leqslant\frac{1}{l}\|u\|,\quad\forall u\in C_0^\infty(X). \tag{29}$$

记$R_l=A-A_l$，则R_l为具核$r_l(x,y)\in C_0^\infty(X\times X)$的积分算子，而为由$L_2(X)$到$L_2(X)$的紧算子(全连续算子)。

由(29)知$\|A-R_l\|\leqslant\frac{1}{l}$，故

$$\lim_{l\to\infty}\|A-R_l\|=0,$$

即紧算子列$\{R_l\}$依算子范数收敛于算子A，故A也是紧算子。

推论1 设$A\in L^m_{\rho,\delta}(X)$，$m<0$，$0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$，且$K_A$具紧台，则$A$可延拓为由$L_2(X)$到$L_2(X)$的紧算子。

证 由K_A具紧台及$m<0$，知(28)成立。

注2 这里介绍的有界性定理，是Hörmander在其著名论文"Fourier Integral Operators, I"中给出的。在此之前，他曾在"拟微分算子与亚椭圆方程"（见Proc. Symp. Pure Math. 10(1966)138-183）一文中用较复杂的推导给出如下结果。

设$P(x,\xi)\in C^\infty(R^n\times R_n)$，且具性质

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta P(x,\xi)|\leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

$$(x,\xi)\in \boldsymbol{R}^n\times \boldsymbol{R}_n, \tag{30}$$

其中$C_{\alpha,\beta}$不依赖于(x,ξ)，则有

$$\|P(x,D)u\|\leqslant C\|u\|,\quad \forall u\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n).$$

显然，对于K_A具紧台的零阶拟微分算子，条件(30)是成立的。

关于L_2估计的更深入的讨论，还可参阅L. Hörmander, Comm. Pure Appl. Math., 24(1971)671-704.

注3 A. P. Caldoron及R. Vaillancourt对有界性定理作了重大改进，其结果如下

设$a(x_1,x_2,\xi)\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n\times \boldsymbol{R}^n\times \boldsymbol{R}_n)$，并满足估计

$$|D_{x_j}^\alpha D_\xi^\beta a(x_1,x_2,\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^{-m-\rho|\alpha|+\delta_j|\beta|} \tag{31}$$

$$0\leqslant|\beta|\leqslant 2\left[\frac{n}{2}\right]+2,\quad 0\leqslant|\alpha|\leqslant 2m_j,$$

$$0\leqslant\rho\leqslant\delta_j<1,\quad j=1,2,$$

m_j则为满足不等式$m_j(1-\delta_j)\geqslant\frac{5}{4}n$的最小整数。记$\|a\|$为使(31)成立的最小常数$C$。若$a$关于$\xi$具紧台，且$\frac{m}{n}\geqslant\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)-\rho$，则算子

$$(Af)(x_1)=\iint e^{i(x_1-x_2,\xi)}a(x_1,x_2,\xi)f(x_2)dx_2d\xi. \tag{32}$$

在$L_2(\boldsymbol{R}^n)$中有界，且$\|A\|\leqslant C'\|a\|$，这里C'与δ_1,δ_2，ρ及n有关，但与a的台无关。

这个结果在一般线性偏微分方程$P(x,D)u=f$的局部可解性理论中有重要的应用。

L_2中有界性的最近讨论见：

R. Beals, Comm. PDE, 2(1977)1063-1070;

H. O. Cordes, J. Funct. Anal., 18(1975) 115-131;

L. Hörmander, Comm. Pure Appl. Math., 32 (1979) 359-443.

注4 拟微分算子在$L_p(1<p<\infty)$中有界性的讨论也很多，主要文章有

R. Beals, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 29:3(1979)239-260;

R. Illner, Comm. PDE, 2(1977)359-393.;

R. R. Coifman, Y. Meyer, Asterisque, 57(1978)1-185.;

M. Nagase, Comm. PDE, 2(1977)1045-1061.

3.5.3 Gårding不等式

利用引理4，可给出著名的Gårding不等式，即下面的结果。

定理5 设适拟微分算子$A\in L^m_{\rho,\delta}(X)$，$0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$。若存在与$(x,\xi)$无关的常数$C>0$，使

$$\mathrm{Re}\,\sigma_A(x,\xi)\geqslant C|\xi|^m.\quad(\text{对大的}|\xi|),\tag{33}$$

则对每个紧集$K\subset X$及每个实数s，有

$$\mathrm{Re}\langle Au,u\rangle\geqslant C_0\|u\|^2_{\frac{m}{2}}-C_1\|u\|^2_s,\quad\forall u\in C_0^\infty(K),\tag{34}$$

其中常数$C_0>0$，$C_1>0$，不依赖于u，而

$$\|u\|^2_s=\int(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2d\xi.$$

证　先设$m=0$. 据假定(33)，知有

$$\mathrm{Re}\,\sigma_A(x,\xi)\geqslant C\qquad(|\xi|\geqslant r),\tag{35}$$

记 $A_1=\frac{A+A^*}{2}-\frac{C}{4}I$，$I$为恒等算子，则$A_1^*=A_1$，且

$$\sigma_{A_1}(x,\xi)=\mathrm{Re}\sigma_A(x,\xi)-\frac{C}{4}+r_1(x,\xi), \qquad (36)$$

其中$r_1\in S_{\rho,\delta}^{-(\rho-\delta)}$，故有估式

$$|r_1(x,\xi)|\leqslant C'(K)(1+|\xi|)^{-(\rho-\delta)}, \ x\in K,\ \xi\in \mathbf{R}_n.$$

由此及(35)、(36)可得

$$\lim_{t\to\infty}\inf_{\substack{x\in K\\|\xi|\geq t}}\mathrm{Re}\sigma_{A_1}(x,\xi)>\frac{C}{4}>0. \qquad (37)$$

据引理4知存在$B\in L_{\rho,\delta}^0$，使$A_1-B^*B\equiv R\in L^{-\infty}$。由于

$$\mathrm{Re}\langle Au,u\rangle=\frac{1}{2}\langle Au,u\rangle+\frac{1}{2}\overline{\langle Au,u\rangle}$$

$$=\frac{1}{2}\langle Au,u\rangle+\frac{1}{2}\langle u,Au\rangle=\left\langle\frac{A+A^*}{2},u\right\rangle$$

$$=\langle A_1u,u\rangle+\frac{C}{4}\|u\|^2,$$

故有

$$\mathrm{Re}\langle Au,u\rangle=\langle B^*Bu,u\rangle+\langle Ru,u\rangle+\frac{C}{4}\|u\|^2$$

$$=\|Bu\|^2+\frac{C}{4}\|u\|^2+\langle Ru,u\rangle.$$

于是

$$\mathrm{Re}\langle Au,u\rangle\geqslant\frac{C}{4}\|u\|^2-|\langle Ru,u,\rangle|, \quad \forall u\in C_0^\infty(K) \qquad (38)$$

记R的核为$r(x,y)$，有$r\in C^\infty(X\times X)$。取$\psi(x,y)\in C_0^\infty(X\times X)$，使$\psi$在$K\times K$的某邻域中恒等于1。记$r_K=\psi r$，则有$r_K(x,y)\in C_0^\infty(X\times X)$，且

$$|\langle Ru,u\rangle| = \left|\iiint r_K(x,y)u(y(n)\overline{x)}dydx\right|$$

$$=(2\pi)^{-n}\left|\iiint \widehat{r_K}(\xi,\eta)\,\widehat{u}(\eta)\,\overline{\widehat{u}(\xi)}d\xi d\eta\right|$$

$$\leqslant(2\pi)^{-n}\iint(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|\eta|^2)^{-\frac{s}{2}}|\widehat{r}_K(\xi,$$

$$\eta)|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}|\widehat{u}(\xi)|(1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}|\widehat{u}(\eta)|d\xi d\eta$$

$$\leqslant(2\pi)^{-n}\left(\iint(1+|\xi|^2)^{-s}(1+|\eta|^2)^{-s}|\hat{r}_K(\xi,\eta)|^2d\xi d\eta\right)\Big|\int(1$$

$$+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2d\xi),$$

即：

$$|\langle Ru,u\rangle|\leqslant C_0\|u\|_s^2,\ \forall u\in C_0^\infty(K). \qquad (39)$$

由(38)及(39)得

$$\mathrm{Re}\langle Au,u\rangle\geqslant C_1\|u\|^2-C_0\|u\|_s^2,\ \forall u\in C_0^\infty(K)$$

故当$m=0$时，(34)成立。

对于一般的实数$m\neq0$，可取适拟微分算子$Q\in L^{\frac{m}{2}}$，使$\sigma_Q\equiv(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{4}}(\mathrm{mod}S^{-\infty})$。应用证明引理4时所采用的逐次逼近法的标准程序，容易证明存在适拟微分算子$P\in L^{-\frac{m}{2}}$，使具性质

$$PQ=I+R,\ R\in L^{-\infty}.$$

I为恒等算子．于是有

$$A=(PQ-R)^*A(PQ-R)=Q^*P^*APQ-R_1,\ R_1\in L^{-\infty},$$

$$\langle Au,u\rangle=\langle(P^*AP)(Qu),Qu\rangle+\langle R_1u,u\rangle.$$

记$P^*AP=A_0$，$Qu=v$，有

$$\langle Au,u\rangle=\langle A_0v,v\rangle+\langle R_1u,u\rangle. \tag{40}$$

容易看出$A_0\in L^0_{\rho,\delta}$，且由合成算子的符征的渐近展式及条件(33)知有$\mathrm{Re}\sigma_A\geqslant C'$(对大的$|\xi|$)。于是对$A_0$可应用(38)得

$$\mathrm{Re}\langle A_0v,v\rangle\geqslant\frac{C'}{4}\|v\|^2-|\langle R_2v,v\rangle|,\ R_2\in L^{-\infty}. \tag{41}$$

由于

$$\langle R_2v,v\rangle=\langle Q^*R_2Qu,u\rangle=\langle R_3u,u\rangle, \tag{42}$$

其中$R_3=Q^*R_2Q\in L^{-\infty}$。对上式应用估式(39)，并结合(40)、(41)及(42)诸式，即得

$$Re\langle Au,u\rangle\geqslant C_1\|Qu\|^2-C_0\|u\|_s^2,\quad\forall u\in C_0^\infty(K) \tag{43}$$

记$Q_{\frac{m}{2}}=O_p((1+|\xi|^2)^{\frac{m}{4}})$，据$Q$的定义有

$$Q=Q_{\frac{m}{2}}+R',\ R'\in L^{-\infty},$$

故得

$$\|Qu\|^2=\langle Q^*Qu,u\rangle=\langle Q^*_{\frac{m}{2}}Q_{\frac{m}{2}}u,u\rangle+\langle R''u,u\rangle, \tag{44}$$

其中$R''\in L^{-\infty}$。由(43)及(44)有

$$\mathrm{Re}\langle Au,u\rangle\geqslant C_1\|Q_{\frac{m}{2}}u\|^2-C_0'\|u\|_s^2,\ \forall u\in C_0^\infty(K), \tag{45}$$

但

$$\|Q_{\frac{m}{2}}u\|^2=\left\|\int e^{i(x,\xi)}(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{4}}\hat u(\xi)d\xi\right\|^2$$

$$=\|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{4}}\hat u(\xi)]\|^2$$

$$=(2\pi)^{-2n}\|(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{4}}\hat u(\xi)\|^2=\|u\|^2_{\frac{m}{2}}$$

代入(45)，即得Gårding不等式(33)。

注5 不等式(33)最初由Gårding于1953年对微分算子情形得到，随后Calderon及Zygmund对奇异积分算子也给出类似结果。近年来在比定理5更弱的假定下，得到所谓的精确Gårding不等式，即如下结果

若$A\in L^m$，且$\operatorname{Re}\sigma_A(x,\xi)\geqslant 0$，则有

$$\operatorname{Re}\langle Au,u\rangle\geqslant -C\|u\|^2_{(m-1)/2},\quad \forall u\in C_0^\infty(K)$$

Hörmander于1979年还将这一结果改进为：

$$\operatorname{Re}\langle Au,u\rangle\geqslant -C\|u\|^2_{\frac{m}{2}-\frac{6}{10}},\quad \forall u\in C_0^\infty(K)$$

详见前引文献。

Gårding不等式是建立椭圆型算子的先验估计式的重要而基本的工具。

3.6 波 锋 集

3.6.1. 广函的波锋集

定义1 设$u\in\mathscr{D}'(X)$，X为$\mathbf{R}^n$中的域。对$(x^0,\xi^0)\in X\times(\mathbf{R}_n\setminus 0)$，若存在$x^0$的邻域$\omega_\delta=\{x:|x-x_0|<\delta\}$及$v\in\mathscr{E}'(X)$，满足下列两个条件：

1) $v|_{\omega_\delta}=u|_{\omega_\delta}$，这里$u|_{\omega_\delta}$表示$u$在$\omega_\delta$中的缩射；

2) v的Fourier变换$\hat{v}(\xi)$在ξ^0的某个锥邻域$\Gamma_\varepsilon=\left\{\xi:\left|\frac{\xi}{|\xi|}-\frac{\xi^0}{|\xi^0|}\right|<\varepsilon\right\}$中急降，即：对每个自然数$N$，有常数$C_N>0$，使

$$|\hat{v}(\xi)| \leqslant C_N(1+|\xi|)^{-N},\ \xi \in \Gamma_\varepsilon, \tag{1}$$

即称 $(x^0,\ \xi^0)$ 不属于广函 u 的波锋集，记为：$(x^0,\ \xi^0) \notin WF(u)$；而波锋集 $WF(u)$ 便定义为 $X \times (\boldsymbol{R}_n \setminus 0)$ 中所有不具上述性质的点 (x,ξ) 的集合。

容易由定义知 $WF(u)$ 是 $X \times (\boldsymbol{R}_n \setminus 0)$ 中的闭锥集。

引理1 设 $\varphi \in C_0^\infty(X)$，则有 $WF(\varphi u) \subset WF(u)$。

证 只须证明 $(x^0,\ \xi^0) \notin WF(u) \Rightarrow (x^0,\ \xi^0) \notin WF(\varphi u)$。

若 $(x^0,\xi^0) \notin WF(u)$，则有 $v \in \mathscr{E}'(X)$ 满足定义1中的要求1)及2)。记 $v_1 = \varphi v$，只须验证 $\widehat{\varphi v}(\xi)$ 在 $\Gamma_{\varepsilon'}$ 中满足估计式(1)，这里 $0 < \varepsilon' < \varepsilon$。由于

$$\hat{v}_1(\xi) = \widehat{\varphi v}(\xi) = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{v} = \int \hat{v}(\xi-\eta)\hat{\varphi}(\eta)\,d\!\!\!{}^-\eta$$

$$= \int_{|\eta| \leqslant \lambda|\xi|} \hat{v}(\xi-\eta)\hat{\varphi}(\eta)\,d\!\!\!{}^-\eta$$

$$+ \int_{|\eta| > \lambda|\xi|} \hat{v}(\xi-\eta)\hat{\varphi}(\eta)\,d\!\!\!{}^-\eta \equiv I_1 + I_2.$$

其中 λ 为待定的正参数。现在选择 λ，使当 $|\eta| \leqslant \lambda|\xi|$ 及 $|\xi| \in \Gamma_{\varepsilon'}$ 时，有 $\xi-\eta \in \Gamma_\varepsilon$。为此可要求 λ 满足下面的估计式

$$\left|\frac{\xi-\eta}{|\xi-\eta|} - \frac{\xi^0}{|\xi^0|}\right| \leqslant \left|\frac{\xi-\eta}{|\xi-\eta|} - \frac{\xi}{|\xi|}\right| + \varepsilon'$$

$$\leqslant \left|\frac{|\xi|-|\xi-\eta|}{|\xi-\eta||\xi|}\xi - \frac{\eta}{|\xi-\eta|}\right| + \varepsilon'$$

$$\leqslant \varepsilon' + \frac{2|\eta|}{||\xi|-|\eta||} \leqslant \varepsilon' + \frac{2\lambda}{1-\lambda}.$$

由此知可取 λ，使 $0 < \lambda < \dfrac{\varepsilon-\varepsilon'}{2+(\varepsilon-\varepsilon')}$。于是当 $\xi \in \Gamma_\varepsilon$ 时，有

$$|I_1|\leqslant\int_{|\eta|\leqslant\lambda|\xi|}C_N(1+|\xi-\eta|)^{-N}|\widehat{\varphi}(\eta)|d\eta$$

$$\leqslant C_N(1-\lambda)^{-N}(1+|\xi|)^{-N}\int|\widehat{\varphi}(\eta)|d\eta$$

$$\leqslant C_N'(1+|\xi|)^{-N},\quad \xi\in\Gamma_\varepsilon.$$

为估计I_2，注意$\widehat{\varphi}(\eta)$关于η急降；而$\widehat{v}(\eta)$关于η为幂增的：$|\widehat{v}(\eta)|\leqslant C_p(1+|\eta|)^p$，$p$为某个正整数。于是

$$|I_2|\leqslant C_pC_l\int_{|\eta|>\lambda|\xi|}(1+|\xi-\eta|)^p(1+|\eta|)^{-l}d\eta,$$

其中 l 为任意的正整数。特别取$l>N+n+1+2p$，可得：

$$|I_2|\leqslant C''(N)(1+|\xi|)^{-N}$$

故当$\xi\in\Gamma_\varepsilon$时，估式(1)对v_1成立。

推论1 设$u\in\mathscr{D}'(X)$，$(x^0,\xi^0)\in X\times(R_n\setminus0)$，则 $(x^0,\xi^0)\notin WF(u)$的充要条件是：存在$\varphi(x)\in C_0^\infty(X)$，使$\varphi$在$x^0$的某邻域$\omega_\delta$中恒等于1，且$\widehat{\varphi u}(\xi)$在$\xi^0$的某个锥邻域$\Gamma_\varepsilon$中急降，即满足估式(1)。

引理2 设$u\in\mathscr{D}'(X)$，则有

$$\pi_xWF(u)=\text{sing supp}\,u.$$

这里π_x是$X\times R_n$到X的自然投影映射。

证 1) 设$x^0\notin\text{sing supp}\,u$，则在$x^0$的某个邻域$\omega_\delta$中有$u\in C^\infty(\omega_\delta)$。取$\varphi(x)\in C_0^\infty(\omega_\delta)$且在$\omega_{\delta'}$中$\varphi\equiv1$，$0<\delta'<\delta$，则$\varphi u\in C_0^\infty(X)$，且$\varphi u|_{\omega_{\delta'}}=u|_{\omega_{\delta'}}$。显然有$\widehat{\varphi u}(\xi)\in\mathscr{S}(R_n)$，即关于$\xi$急降。特别地，对于每个$\xi^0\neq0$，在$\xi^0$的某邻域$\Gamma_\varepsilon$中，$\widehat{\varphi u}(\xi)$满足估式(1)。据推论1知$(x^0,\xi^0)\notin WF(u)$，故有$x_0$

$\notin \pi_x WF(u)$。这表明$\pi_x WF(u) \subset \text{sing supp} u$。

2）若$x^0 \notin \pi_x WF(u)$，则对每个$\xi^* \in R_n \setminus 0$，有$(x^0, \xi^*) \notin WF(u)$。于是有相应的$\omega_{\delta *}$及$\varphi^*(x) \in C_0^\infty(X)$，且当$x \in \omega_{\delta}*$有$\varphi^* \equiv 1$，使$\widehat{\varphi^* u}(\xi)$在某$\Gamma_{\varepsilon *}$中急降。

当ξ^*取遍$R_n \setminus 0$时，$\{\Gamma_{\frac{\varepsilon *}{2}}\}$覆盖$R_n \setminus 0$。记

$$\Gamma'_{\frac{\varepsilon *}{2}} = \{\xi : |\xi| = 1, \ \xi \in \Gamma_{\varepsilon *}\},$$

则$\{\Gamma'_{\frac{\varepsilon *}{2}}\}$覆盖$R_n$中的单位球面$S^{n-1}$。由$S^{n-1}$的紧性，知存在有限的子覆盖，记为$\{\Gamma''_{\frac{1}{2}\varepsilon_j}\}_{j=1}^N$。于是有$\bigcup_{j=1}^N \Gamma''_{\frac{1}{2}\varepsilon_j} = R_n \setminus 0$.

取$\delta = \min_{1 \leq j \leq N}\{\delta_j\}$，令$\Phi = \prod_{j=1}^N \varphi_j(x)$，有$\Phi(x) \in C_0^\infty(X)$，且$\Phi(x)$在$\omega_\delta$中恒等于1，而$\Phi u = (\varphi_1 \cdots \varphi_{j-1} \varphi_{j+1} \cdots \varphi_N)(\varphi_j u) = \psi_j \varphi_j u$，因$\widehat{\varphi_j u}(\xi)$在$\Gamma_{\varepsilon_j}$中急降，$\psi_j \in C_0^\infty(X)$，故$\widehat{\Phi u} = \psi_j \widehat{(\varphi_j u)}$在$\Gamma_{\frac{1}{2}\varepsilon}$中急降（见引理1的证明）。因$j$为$1, \cdots, N$中的任一个，且$\Gamma\{''_{\frac{1}{2}\varepsilon_j}\}_{j=1}^N$覆盖$R_n \setminus 0$，故$\widehat{\Phi u}$在$R_n \setminus 0$中急降，随之$\varphi u = \int e^{-i(x \cdot \xi)} \widehat{\varphi u}(\xi) d\xi \in C^\infty(X)$。但$\varphi$在$\omega_\delta$中取值1，故$u \in C^\infty(\omega_\delta)$，这表明$x^0 \notin \text{sing supp} u$，即$\text{sing supp} u \subset \pi_x WF(u)$。

结合1)及2)中两种相反包含关系，即得所论两个集合的重合一致性。

下面利用ψDO来研究波锋集，并通过波锋集揭示ψDO的特性。

3.6.2 波锋集与拟微分算子

定理1 设$u\in\mathscr{D}'(X)$，$(x^0,\xi^0)\notin WF(u)$，则存在适拟微分算子$A\in CL^0(X)$，具备下列两个性质：

1) $\sigma_A\equiv 1(\mathrm{mod}S^{-\infty}(\omega_\delta\times\Gamma_\varepsilon)$，$\omega_\delta\times\Gamma$为$(x^0,\ \xi^0)$的某锥邻域；

2) $Au\in C_0^\infty(X)$

证 因$(x^0,\xi^0)\notin WF(u)$，故存在$\varepsilon_0>0$，$\delta_0>0$及$\varphi(x)\in C_0^\infty(X)$，且在$x^0$的邻域$\omega_{\delta_0}$中$\varphi(x)\equiv 1$，$\widehat{\varphi u}(\xi)$在$\xi^0$的锥邻域$\Gamma_{\varepsilon_0}$中急降。设$\delta$为小于$\delta_0$的某个正数，取$\psi(x)\in C_0^\infty(\omega_{\delta_0})$，且在$\omega_\delta$中$\psi\equiv 1$。取$\varepsilon<\varepsilon_0$，$\varepsilon>0$，作$\tau(\xi)\in C^\infty(R_n\setminus 0)$，使具下述两个性质：

i) $\tau(\xi)$为正齐零次函数；

ii) $\mathrm{supp}\,\tau\subset\Gamma_{\varepsilon_0}$，且在$\Gamma_\varepsilon$中$\tau(\xi)\equiv 1$。

又取$t(\xi)\in C^\infty(R_n)$，使当$|\xi|\leqslant\frac{1}{4}$时$t(\xi)\equiv 0$，当$|\xi|\geqslant\frac{1}{2}$时$t(\xi)\equiv 1$。令

$$a(x,y,\xi)=\psi(x)\varphi(y)t(\xi)\tau(\xi),$$

则以a作振幅的拟微分算子A即为所求。事实上，显然有$A\in L^0(X)$，且K_A具紧台，故A为适ψDO。此外，有

$$\sigma_A(x,\xi)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\psi(x)\partial_\xi^\alpha[t(\xi)\tau(\xi)]D_x^\alpha\varphi(x)\qquad(2)$$

据3.3.3所述渐近展式的性质7)，知有

$$\sigma_A(x,\xi)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}t\left(\frac{\xi}{2}\right)\psi(x)\partial_\xi^\alpha[t(\xi)\tau(\xi)]D_x^\alpha\varphi(x),$$

即

$$\sigma_A(x,\xi) \sim \sum_\alpha t\left(\frac{\xi}{2}\right)\frac{1}{\alpha!}\psi(x)\partial_\xi^\alpha \tau(\xi) D_x^\alpha \varphi(x), \qquad (3)$$

故$\sigma_A \in CS^0(X \times R_n)$，即$A \in CL^0(X)$。

当$(x,\xi) \in \omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon$时，$\tau(\xi)$，$\varphi(x)$及$\psi(x)$都取值1，于是由(2)得：$\sigma_A(x,\xi) - t(\xi) \in S^{-\infty}(\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon)$。但$t(\xi) - 1 \in C_0^\infty \subset S^{-\infty}$，故

$$\sigma_A(x,\xi) \equiv 1(\mathrm{mod} S^{-\infty}(\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon)).$$

为证$Au \in C_0^\infty(X)$，只须注意Au可表为

$$Au = \psi(x)\int_{\Gamma_{\varepsilon_0}} e^{i\langle x, \xi\rangle} t(\xi)\tau(\xi)(\widehat{\varphi u})(\xi) d\xi,$$

因$\widehat{\varphi u}(\xi)$在Γ_{ε_0}中急降，故可在积分号内对x求导，且所得积分绝对并一致收敛。由于$\psi(x) \in C_0^\infty(X)$，知确有$Au \in C_0^\infty(X)$。

定理1的逆命题可由下述定理推出。

定理2 设$u \in \mathscr{D}'(X)$，$(x^0, \xi^0) \in X \times (R_n \setminus 0)$，$A \in CL^m(X)$，且或者$A$为适$\psi$DO，或者$u \in \mathscr{E}'(X)$，使$Au$有意义，且$Au \in C^\infty$。若$A$的主符征$a_m(x,\xi)$使$a_m(x^0, \xi^0) \neq 0$，则$(x^0, \xi^0) \notin WF(u)$。

为了证明定理2，先建立两个引理。

引理3 设$A \in CL^m(X)$，其主符征为$a_m(x,\xi)$。若$(x^0,\xi^0) \in X \times (R_n \setminus 0)$使$a_m(x^0, \xi^0) \neq 0$，则存在适拟微分算子$B \in CL^{-m}(X)$，具性质

$$\sigma_{B \circ A}(x,\xi) \equiv 1(\mathrm{mod} S^{-\infty}(\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon)), \qquad (4)$$

其中$\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon$为$(x^0,\xi^0)$的某个锥邻域。

注1 $a_m(x^0,\xi^0) \neq \varnothing$表明$A$在点$(x^0, \xi^0)$属椭圆型；一般，若$\mathrm{char}(A) = \phi$，则称$A$在$X$中为椭圆型拟微分算子。引理3表明：若$A$在点$(x^0,\xi^0)$属椭圆型，则局部地存在左拟逆$B$，使

$B\circ A=I+R$，$R\in L^{-\infty}$。由引理 3 的证明还可知，A有局部的右拟逆B_1，使$A\circ B_1=I+R_1$，$R_1\in L^{-\infty}$，且$B-B_1\in L^{-\infty}$，故B同时为A的局部左拟逆及右拟逆，而称为A的拟逆或参函数(parametrix)。

证 因$a_m(x^0,\xi^0)\neq 0$，据a_m的连续性及对ξ的正齐m次性，知存在(x^0,ξ^0)的锥邻域$\omega_0\times\Gamma_\varepsilon$，使在其中$a_m\neq 0$。设$t(\xi)$，$\tau(\xi)$及$\psi(x)$如定理 1 证明中所述，令

$$b_0(x,\xi)=\frac{w(x,\xi)}{a_m(x,\xi)},\quad w(x,\xi)=t(\xi)\tau(\xi)\psi(x),$$

则对于大的$|\xi|$，b_0是ξ的正齐$-m$次函数，且$b_0\in C^\infty(X\times \mathbf{R}_n)$，且$b_0\in CS^{-m}(X\times\mathbf{R}_n)$。于是存在适拟微分算子$B_0\in CL^{-m}(X)$，且$\sigma_{B_0}\equiv b_0(\mathrm{mod}S^{-\infty})$，使

$$\sigma_{B_0\circ A}\equiv\sigma_{B_0}\sigma_A(\mathrm{mod}S^{-1})\equiv b_0\sigma_m(\mathrm{mod}S^{-1})$$
$$\equiv w(x,\xi)(\mathrm{mod}S^{-1}),$$

即

$$\sigma_{B_0\circ A}=w(x,\xi)-r(x,\xi),\ r(x,\xi)\in S^{-1}(X\times\mathbf{R}_n). \tag{5}$$

取$R\in CL^{-1}(X)$，使满足要求

$$\sigma_R\equiv r(x,\xi)(\mathrm{mod}S^{-\infty}), \tag{6}$$

再取$Q\in CL^{-1}(X)$，使其符征具渐近展式

$$\sigma_Q\sim 1+\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_{R^j}, \tag{7}$$

则$B=QB_0$即为所求。事实上，由(7)知：对每个大于 1 的整数N，有

$$Q \equiv I + \sum_{j=1}^{N-1} R^j \quad (\mathrm{mod} S^{-N}),$$

I 为恒等算子。故

$$\begin{aligned} BA = QB_0A &\equiv (I + R + \cdots R^{N-1})(B_0A)(\mathrm{mod} S^{-N}) \\ &\equiv (I + R + R^2 + \cdots + R^{N-1})(I - R) \\ &\quad + Q(B_0A + R - I) \ (\mathrm{mod} S^{-N}) \\ &\equiv I - R^N + Q(B_0A + R - I) \quad (\mathrm{mod} S^{-N}) \\ &\equiv I + Q(B_0A + R - I) \quad (\mathrm{mod} S^{-N}). \end{aligned}$$

记$B_0A + R - I = H$，据(5)及(6)知$\sigma_H \equiv w - 1 \ (\mathrm{mod} S^{-\infty})$，于是

$$\sigma_{BA} \equiv 1 + \sigma_{QH}(\mathrm{mod} S^{-N})$$

$$\equiv 1 + \sum_{|\alpha|=0}^{N-1} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \sigma_Q D_x^\alpha (w - 1) \quad (\mathrm{mod} S^{-N}).$$

特别当$(x, \xi) \in \omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon$时，由$w$的定义知$D_x^\alpha(w - 1) = 0$，$|\alpha| \neq 0$，故得

$$\sigma_{BA} \equiv 1 + \sigma_Q(w - 1) \ (\mathrm{mod} S^{-N}), \ (x, \xi) \in \omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon,$$

但$w - 1 \in C^\infty$，且当$(x, \xi) \in \omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon$时及$|\xi| \geqslant 1$时，$\omega - 1 \equiv 0$. 这表明$w - 1 \in S^{-\infty}(\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon)$。由此知

$$\sigma_{BA} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}^{-N}(\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon)),$$

由N的任意性知(4)成立。

引理 4 设 $v \in \mathscr{E}'(\boldsymbol{R}^n)$，$\tau(\xi) \in S^m_{\rho, 0}$，$0 < \rho \leqslant 1$，$\tau(D) = O_p(\tau(\xi))$，则当$d(x, \mathrm{supp} v) \geqslant 1$时，对每个自然数$N$及每个指标组$\alpha$有

$$|D_x^\alpha \tau(D) v| \leqslant C_\alpha(N)(1 + |x|)^{-N}. \qquad (8)$$

这里$d(x, U)$记点x到集U的距离，$d(x, U) = \inf_{y \in U} |x - y|$。

证 首先指出，只须对 $v \in C_0(\boldsymbol{R}^n)$ 的特殊情形证明估式

(8)。事实上，由紧台广函的结构定理(见2.2.3)知有

$$v=\sum_{|\beta|<p}D_x^\beta v_\beta,\quad v_\beta\in C_0(R^n),$$

故若(8)对$v_\beta\in C_0(R^n)$成立，则它对$v\in\mathscr{E}'(R^n)$也成立。

其次，对于每个α，记$D^\alpha\tau_\alpha(D)=\tau_\alpha(D)$，则有$\tau_\alpha(D)\in L_{\rho,0}^{m+|\alpha|}$，且$\tau_\alpha(D)=O_p(\xi^\alpha\tau(\xi))$，故只须对$|\alpha|=0$的情形证明估式(8)，然后对一般的$\alpha$，换$\tau(D)$为$\tau_\alpha(D)$即得(8)。

于是问题简化为：对$v\in C_0(R^n)$，证明

$$|\tau(D)v|\leqslant C(N)(1+|x|)^{-N},\quad (d(x,\mathrm{supp}v)\geqslant 1),\tag{8'}$$

N为任意整数且$N>1$。

注意对每个$u\in C_0^\infty(R^n)$，当$d(x,\mathrm{supp}u)\geqslant\delta>0$时，$|x-y|\neq 0$，$y\in\mathrm{supp}u$，故有

$$\tau(D)u=\iint e^{i(x-y,\xi)}\tau(\xi)u(y)dyd\xi$$

$$=\iint|x-y|^{-2N}e^{i(x-y,\eta)}(-\Delta_\xi)^N\tau(\xi)u(y)dyd\xi。\tag{9}$$

由于C_0^∞在C_0中稠，利用(9)容易证明：当$v\in C_0$时，若$d(x,\mathrm{supp}v)\geqslant 1$，则有

$$\tau(D)v=\iint|x-y|^{-2N}(-\Delta_\xi)^N\tau(\xi)v(y)dyd\xi,\tag{10}$$

取N充分大，使$m-2N\rho\leqslant-(n+1)$，由(10)可得估计

$$|\tau(D)v|\leqslant C_N[d(x,\mathrm{supp}v)]^{-2N}=C_N|x-x^0|^{-2N},\tag{11}$$

这里x^0是紧集$\mathrm{supp}v$上的某点，可依赖于x。因

$$|x-x^0|^{-2N}=\left(\frac{1+|x|}{|x-x^0|}\right)^{2N}(1+|x|)^{-2N}$$

$$\leqslant\left(1+\frac{1+|x|}{|x-x^0|}\right)^{2N}(1+|x|)^{-2N},$$

故有

$$|x-x^0|^{-2N}\leqslant(2+R)^{2N}(1+|x|)^{-2N}, \qquad (12)$$

其中R为包含紧集$\mathrm{supp}\,v$的某个球的半径。结合(11)及(12)即得(8′)

$$|\tau(D)v|\leqslant C_N'(1+|x|)^{-2N}\leqslant C_N(1+|x|)^{-N}.$$

定理2的证明.为确定起见，不妨设$u\in\mathscr{D}'(X)$，A为适ψDO。据引理3知，存在适拟微分算子$B\in CL^{-m}$，使$A_1=BA$满足下面两个要求：

1) $A_1\in CL^0$，且$A_1u\in C^\infty(X)$；

2) $\sigma_{A_1}\equiv1\ (\mathrm{mod}S^{-\infty}(\omega_\delta\times\Gamma_\varepsilon))$，$\omega_\delta\times\Gamma_\varepsilon$为$(x^0,\xi^0)$的某个锥邻域.

取$\varphi(x)\in C_0^\infty(\omega_\delta)$，且在$\omega_{\delta_1}$上$\varphi\equiv1$，$0<\delta_1<\delta$。只须证明$\widehat{\varphi u}(\xi)$在$\Gamma_{\varepsilon_1}$中急降，这里$\varepsilon_1>0$，$\varepsilon_1<\varepsilon$。为此取$\tau(\xi)\in S^0(\boldsymbol{R}_n)$，$\mathrm{supp}\ \tau\subset\Gamma_\varepsilon$，且在$\Gamma_{\varepsilon_1}$中$\tau\equiv1$。今证$\tau(\xi)\widehat{\varphi u}(\xi)\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}_n)$，或等价的结论

$$F^{-1}[\tau(\xi)\widehat{\varphi u}(\xi)]\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n), \qquad (10)$$

记$\tau(D)=O_p(\tau(\xi))$，则(10)可改写为：

$$\tau(D)(\varphi u)(x)\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}_n). \qquad (10')$$

现在应用引理4证明(10′)。当$d(x,\mathrm{supp}\varphi)\geqslant1$时有

$$|D_x^\alpha\tau(D)(\varphi u)(x)|\leqslant C_\alpha(N)(1+|x|)^{-N}. \qquad (11)$$

剩下只须证明$\tau(D)(\psi u)(x)\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$。为此改写

$$\tau(D)(\varphi u)=\tau(D)\varphi(I-A_1)u+\tau(D)\varphi(A_1u), \qquad (12)$$

因$A_1u\in C^\infty(X)$，$\varphi\in C_0^\infty(\omega_\delta)$，故$\varphi A_1u\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，随之

$$\tau(D)\varphi(A_1u)\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n) \qquad (13)$$

记$B=\tau(D)\varphi(I-A_1)$，今证$B\in L^{-\infty}(\boldsymbol{R}^n)$。显然存在适拟微

分算子 $\tau_1(D)$，使 $\tau_1(D)\equiv\tau(D)\ (\mathrm{mod}L^{-\infty}(\boldsymbol{R}_n))$，故可认为 $\tau(D)$为适ψDO，且$\sigma_{\tau(D)}\equiv\tau(\xi)(\mathrm{mod}S^{-\infty})$。于是

$$\sigma_B(x,\xi)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\tau(\xi)D_x^\alpha\{\varphi(x)[1-\sigma_{A_1}(x,\xi)]\}.\quad(14)$$

当 $\xi\notin\Gamma_\varepsilon$时，有 $\tau(\xi)\equiv0$；当$x\notin\omega_\delta$时，$\varphi(x)\equiv0$；而当$(x,\ \xi)\in\omega_\delta\times\Gamma_\varepsilon$时，有 $\sigma_{A_1}(x,\ \xi)-1\in S^{-\infty}$，故由（14）知 $\sigma_B(x,\xi)\in S^{-\infty}(X\times\boldsymbol{R}_n)$，即$B\in L^{-\infty}(\boldsymbol{R}^n)$。故$B$为具核$b(x,y)\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n)$的积分算子。于是，对每个$v\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$(Bu,v)=(u,\ {}^tBv)=\left(u,\ \int b(x,y)v(x)dx\right)=(u(b),v).$$

显然有$u(b)\equiv b_1(x)\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，故$Bu\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$。结合(12)及(13)′即得$\tau(D)(\varphi u)\in C^\infty(X)$。

综合上面所证，知定理 2 成立。

推论2 设$A\in CL^m(X)$，$u\in\mathscr{D}'(X)$，且或者A为适ψDO，或者$u\in\mathscr{E}'(X)$，使Au有意义。若$Au\in C^\infty(X)$，则

$$WF(u)\subset\mathrm{char}(A).$$

特别若 char(A)为空集，即A为椭圆ψDO，则当$Au\in C^\infty(X)$时，有$u\in C^\infty(X)$。

推论3 设 $u\in\mathscr{E}'(X)$，记 $\mathscr{A}_u=\{A:\ Au\in C^\infty(X),\ A\in L^0(X)\}$，则有

$$WF(u)=\bigcap_{A\in\mathscr{A}_u}\mathrm{char}(A).\quad(15)$$

证 1）由推论 2 知$WF(u)\subset\bigcap_{A\in\mathscr{A}_u}\mathrm{char}(A)$。

2）设$(x^0,\ \xi^0)\notin WF(u)$，由定理 1 知存在适拟微分算子$A_0\in CL^0(X)$，使$A_0u\in C^\infty(X)$，即$A_0\in\mathscr{A}_u$，且

$$\sigma_{A_0}\equiv1(\mathrm{mod}S^{-\infty}(\omega_\delta\times\Gamma_\varepsilon))$$

记A_0的主符征为σ_0，有

$$\sigma_0 \equiv 1(\bmod S^{-1}(\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon)),$$

则$\gamma \equiv \sigma_0 - 1 \in S^{-1}(\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon)$。因$\sigma_0$关于$\xi$为正齐零次函数．故

$$|\sigma_0(x^0,\xi^0)-1| = |\sigma_0(x^0,t\xi^0)-1|$$
$$= |\gamma(x^0,t\xi^0)| \leqslant C(1+t|\xi^0|)^{-1}.$$

令$t \to +\infty$，得$\sigma_0(x^0,\xi^0)=1$，这表明$(x^0,\xi^0) \notin \mathrm{char}(A_0)$。因$A_0 \in \mathscr{A}_u$，故$(x^0,\xi^0) \notin \bigcap\limits_{A \in \mathscr{A}_u} \mathrm{char}(A)$，即$WF(u) \supset \bigcap\limits_{A \in \mathscr{A}} \mathrm{char}(A)$。

结合1)及2)，知(15)成立。

注2 若$u \in \mathscr{D}'(X)$，用$\mathscr{A}'_u$记$\mathscr{A}_u$中所有适ψDO 所构成的子集，则同样可证

$$WF(u) = \bigcap_{A \in \mathscr{A}'_u} \mathrm{char}(A). \tag{15'}$$

定理3 设$u \in \mathscr{D}'(X)$，$A \in CL^m(X)$，且或者$u \in \mathscr{E}'(X)$，或者A为适ψDO，则有

$$WF(u) \subset \mathrm{char}(A) \cup WF(Au). \tag{16}$$

证 设$(x^0,\xi^0) \in X \times (\boldsymbol{R}_n \setminus 0)$。若$(x^0,\xi^0) \notin \mathrm{char}(A)$且$(x^0,\xi^0) \notin WF(Au)$，今证$(x^0,\xi^0) \notin WF(u)$，则(16)成立。

由$(x^0,\xi^0) \notin WF(Au)$及定理1，知存在适拟微分算子$P \in CL^0(X)$，使$P(Au) \in C_0^\infty(X)$，且在$(x^0,\xi^0)$的某个锥邻域$\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon$中有$\sigma_P \equiv 1(\bmod S^{-\infty})$，于是$(x^0,\xi^0) \notin \mathrm{char}(P)$(参看推论3的证明)。又因$(x^0,\xi^0) \notin \mathrm{char}(A)$，而$PA$的主符征等于$P$及$A$各自的主符征相乘，故有

$$(x^0,\xi^0) \notin \mathrm{char}(PA) = \mathrm{char}(P) \cup \mathrm{char}(A),$$

由此知PA满足定理2的条件，故$(x^0,\xi^0) \notin WF(u)$。

定理4 设$u \in \mathscr{D}'(X)$，$A \in CL^m(X)$，且或者$u \in \mathscr{E}'(X)$，或者A为适ψDO，则有

$$WF(Au)\subset WF(u)。\tag{17}$$

注3 (17)是拟局部性（见3.2.3）的精确化，称为**微局部性**。

证 设$(x^0,\xi^0)\notin WF(u)$，只须证$(x^0,\xi^0)\notin WF(Au)$。据定理3知：或者$(x^0,\xi^0)\notin WF(Au)$，或者$(x^0,\xi^0)\notin \mathrm{char}(A)$。在后一种情况，由引理3知存在适拟微分算子$Q\in CL^{-m}(X)$，使$\sigma_Q$在某锥集$\omega_\delta\times\Gamma_\varepsilon$外恒为零，且

$$\sigma_{QA}\equiv 1\ (\mathrm{mod} S^{-\infty}(\omega_\delta\times\Gamma_\varepsilon)),\tag{18}$$

又据定理1知：存在适拟微分算子$P\in CL^0(X)$，使

$$Pu\in C_0^\infty(X);\ \sigma_P\equiv 1\ (\mathrm{mod} S^{-\infty}(\omega_\delta\times\Gamma_\varepsilon))。\tag{19}$$

现在考察合成算子

$$(QA)u=QA(I-P)u+(QA)Pu\tag{20}$$

由$Pu\in C_0^\infty(X)$，知$(QA)Pu\in C^\infty(X)$。另一方面，直接由$QA(I-P)$的符征的渐近展式知有

$$\sigma_{QA(I-P)}\in S^{-\infty}\ (\omega_\delta\times\Gamma_\varepsilon),$$

因σ_Q在$\omega_\delta\times\Gamma_\varepsilon$外恒等于零，故

$$\sigma_{QA(I-P)}\in S^{-\infty}(X\times \boldsymbol{R}_n),$$

于是$QA(I-P)\in L^{-\infty}(X\times\boldsymbol{R}_n)$，由此知$QA(I-P)u\in C^\infty(X)$。结合(20)得$Q(Au)\in C^\infty(X)$。故$Q$关于$v=Au$而言，满足定理2的一切条件，因此有$(x^0,\xi^0)\notin WF(v)=WF(Au)$。

故不论在哪种情况，都有$(x^0,\xi^0)\notin WF(Au)$。

推论4 设$u\in\mathscr{D}'(X)$，$A\in CL^m(X)$，且或者$u\in\mathscr{E}'(X)$，或者A为适ψDO，则有：

$$WF(Au)\subset WF(u)\subset \mathrm{char}(A)\cup WF(Au)\tag{21}$$

推论5 设$A\in CL^m(X)$为椭圆型ψDO，则有

$$WF(Au)=WF(u)。\tag{22}$$

注4 满足（22）的ψDO称为严格亚椭圆算子。推论5表明椭圆算子必为严格亚椭圆算子。

3.6.3 广函的微局部化及乘积

定义2 设$(x^0,\xi^0)\in X\times(R_n\setminus 0)$，引进商空间

$$\mathscr{D}'(x^0,\xi^0)=\mathscr{D}'(X)/\{u:\ u\in\mathscr{D}'(X),\ (x^0,\xi^0)\in WF(u)\}, \tag{23}$$

而称为(x^0,ξ^0)处的微广函空间或广函空间$\mathscr{D}'(X)$在(x^0,ξ^0)处的微局部化。

定理4表明，每个经典适拟微分算子A引出线性映射

$$A:\ \mathscr{D}'(x^0,\xi^0)\to\mathscr{D}'(x^0,\xi^0),$$

若更假定A在(x^0,ξ^0)为椭圆型的，则这个映射是可逆的。

很多重要的广函空间都可以微局部化。特别地，空间$H_s(R^n)$可微局部化。下面对它作简要的介绍。

为了便于理解，先引进$H_s(R^n)$在点$x^0\in X$的局部化概念。$H_s(R^n)=\left\{\varphi(x):\|\varphi\|_s^2=\int(1+|\xi|^2)^s|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi<\infty\right\}$.

定义3 称广函u在点$x^0\in X$，属于$H_s^{loc}(X)$，若存在某$\varphi(x)\in C_0(X)$，$\varphi(x^0)\neq 0$，使$\varphi u\in H_s$（这表明广函u在x^0的某邻域ω上的缩象属于$H_s(\omega)$）。

类似地，可定义广函u在$(x^0,\xi^0)\in X\times(R_n\setminus 0)$属于$H_s^{loc}$如下。

定义4 设$(x^0,\ \xi^0)\in X\times(R_n\setminus 0)$，$u\in\mathscr{D}'(X)$。若有某个适拟微分算子$A\in CL^0(X)$，$(x^0,\xi^0)\notin \mathrm{char}(A)$，使$Au\in H_s^{loc}(X)$，则称在$(x^0,\xi^0)$有$u\in H_s^{loc}(x^0,\xi^0)$。

命题1 设u在(x^0,ξ^0)属于$H_s^{loc}(X)$，则u可分解为

$$u=u_1+u_2, \tag{24}$$

其中$u_1\in H_s^{loc}(X)$，且$(x^0,\xi^0)\notin WF(u_2)$。

反之，若$u\in\mathscr{D}'(X)$有上述分解(24)，则对每个具下述性质的A，有$Au\in H_s$。这里A满足要求：$A\in CL^0(X)$，且在(x^0,ξ^0)的不与$WF(u_2)$相交的锥邻域$\omega\times\Gamma$中，有：

$$\sigma_A\equiv 0(\mathrm{mod}S^{-\infty}(\omega\times\Gamma)). \tag{25}$$

证 1)因A在(x^0,ξ^0)为椭圆型算子，故存在$B\in CL^0(X)$，使$BA=I+R$，且R在(x^0,ξ^0)的某个锥邻域$\omega\times\Gamma$中属$L^{-\infty}$，即$\sigma_R\equiv 0(\mathrm{mod}S^{-\infty}(\omega\times\Gamma))$，于是

$$u=BAu+(-Ru)=u_1+u_2,$$

其中 $u_1=BAu\in H_s^{loc}(X)$，$u_2=-Ru$。显然有$(x^0,\ \xi^0)\notin WF(u_2)$。

2）逆命题是显然的，只须注意$A(H_s)\subset H_s$。

推论6 u在(x^0,ξ^0)属于$H_s^{loc}(X)$的充要条件是：u有命题1所述性质的分解(24)。

命题1表明下述定义是十分自然的。

定义5 设$(x^0,\xi^0)\in X\times(\boldsymbol{R}_n\setminus 0)$，记

$$H_s(x^0,\xi^0)=H_s^{loc}(X)/\{u:u\in H_s^{loc}(X),\ (x^0,\xi^0)\notin WF(u)\}, \tag{27}$$

而称为H_s在点$(x^0,\ \xi^0)$的**微局部化**。

对于其它类型的广函空间F，只要具性质

$$(CL^0)F\subset F$$

都可通过上述途径把它微局部化。

微局部化的重要作用在于：它可使奇性的分析大为简化及精确化。由于牵涉较多，这里不可能详细论述。

下面转入波锋集在广函乘法问题上的应用。

设$u_j\in\mathscr{D}'(X)$，$j=1,2$。若

$$WF(u_1)+WF(u_2)\subset X\times(\boldsymbol{R}_n\setminus 0), \tag{27}$$

即若不存在$(x^0, \xi^0) \in WF(u_1)$，使$(x^0, -\xi^0) \in WF(u_2)$，则可定义乘积$u_1 u_2 \in \mathscr{D}'(X)$。

事实上，因乘法为双线性运算，利用单位分解，可认为u_1及u_2都属于$\mathscr{E}'(R^n)$，且它们的台都充分小，使$\widehat{u_1}(\xi)$在锥Γ_1外急降，$\widehat{u_2}(\xi)$在锥Γ_2外急降，且$\Gamma_1 + \Gamma_2 \subset R_n \setminus 0$，即$\Gamma_1$及$\Gamma_2$中每一个都不含另一个的对径点(点$(x, \xi)$及$(x, -\xi)$互为对径点)。在通常情形

$$\widehat{u_1 u_2}(\xi) = \widehat{u_1} * \widehat{u_2} = \int \widehat{u_1}(\xi-\eta)\widehat{u_2}(\eta) d\!\!{}^{-}\eta. \qquad (28)$$

在上述条件(27)下，积分(28)绝对收敛。事实上，当$|\eta| \to \infty$时，或者$u_1(\xi-\eta)$急降，或者$u_2(\eta)$急降，故(28)绝对收敛，而可定义积$u_1 u_2$如下：

$$u_1 u_2 = F^{-1}\left[\int \widehat{u_1}(\xi-\eta)\widehat{u_2}(\eta) d\!\!{}^{-}\eta\right] \qquad (29)$$

例如，若$\tau(x) \in C_0^\infty(R^n)$，$\int \tau(x) dx = 1$，$0 \leqslant \tau \leqslant 1$，记

$$\tau_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\tau\left(\frac{x}{\varepsilon}\right); \quad u_j^{(\varepsilon)} = u_j * \tau_\varepsilon \in C_0^\infty, \quad j = 1, 2,$$

则在$\mathscr{D}'$中收敛性定义下有$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_j^{(\varepsilon)} = u_j$，$j = 1, 2$。故在(29)的意义下有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_1^{(\varepsilon)} u_2^{(\varepsilon)} = u_1 u_2.$$

这表明用(29)定义某些广函乘积的合理性。

例1 设$u_k \in \mathscr{D}'(R^2)$，$k \in R^1$，如下作用于$\varphi \in C_0^\infty(R^2)$：

$$(u_k, \varphi) = \int f_k(x_1)\varphi(x, kx_1) dx_1, \quad f_k \in C_0^\infty(R^1),$$

即$\operatorname{supp} u_k \subset \{(x_1, x_2);\ x_2 = kx_1\}$。考虑积$u_0 u_k$。因

$$\widehat{u_k}(\xi)=\int f_k(x_1)e^{-i(\xi_1x_1+\xi_2kx_1)}dx_1=\widehat{f_k}(\xi_1+k\xi_2),$$

故$WF(u_k)$为位于$\pi_1^{-1}(\operatorname{supp}f_k)$而垂直于直线$x_2=kx_1$的所有法线的集合。这里$\pi_1$：$(x_1,kx_1)\to x_1$。由于

$$(\widehat{u_0}*\widehat{u_k})(\xi)=\int\widehat{f_0}(\xi_1-\eta_1)\widehat{f_k}(\eta_1+k\eta_2)d\eta_1d\eta_2$$

$$=\int\widehat{f_0}(\eta_1)d\eta_1\int\widehat{f_k}(k\eta_2)d\eta_2=\frac{1}{k}f_0(0)f_k(0),$$

故得 $u_0u_k=\frac{1}{k}f_0(0)f_k(0)\delta(x_1,x_2)$。当$k\to0$时极限不存在，即积$u_0u_0$无定义，因这时条件(27)不成立。

所有上述结论，也可直接由$u_k=f_k(x_1)\delta(x_2-kx_1)$推出．事实上，$u_0u_0$及$u_ku_k$都无意义，正是由于$\delta(x_2)\delta(x_2)$及$\delta(x_2-kx_1)\delta(x_2-kx_1)$都无定义所致。也可由

$$\mathrm{WF}(u_k)=\{(x_1,kx_1,-kx_2,\xi_2)\}$$

知积$u_k\cdot u_k$不存在。*)

3.6.4 奇性传播

最后介绍一下奇性传播定理的一种最简单的形式。为此先引进副特征(Bicharacteristics)概念。

设$a(x,\xi)$为定义于$X\times\mathbf{R}_n$的实值光滑函数。考虑由$a(x,\xi)$引出的Hamilton组

$$\frac{dx_j}{dt}=\frac{\partial a}{\partial\xi_j},\quad\frac{d\xi_j}{dt}=-\frac{\partial a}{\partial x_j},\quad j=1,\cdots,n。\qquad(30)$$

定义6 常微分方程组（30）的积分曲线$(x(t),\xi(t))$称为函数$a(x,\xi)$的副特征；若它使$a(x(t),\xi(t))\equiv0$,即称为零副特

* 这种处理乘积的方法，当然比2.4中的讨论局限性大得多．关于这一方面的改进工作，见：W.Ambrose,J.für reine angw.Math.,315(1980)73-91.

征。

定理5 $a(x,\xi)$是(30)的首次积分，即：若$(x(t),\xi(t))$是a的副特征，则有$a(x(t),\xi(t))\equiv\text{const}$。

证 由(30)可算出

$$\frac{da}{dt}(x(t),\ \xi(t))=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}+\frac{\partial a}{\partial \xi_j}\frac{d\xi_j}{dt}\right)$$

$$=\sum_j\left(\frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{\partial a}{\partial \xi_j}-\frac{\partial a}{\partial \xi_j}\frac{\partial a}{\partial x_j}\right)=0,$$

故沿副特征有$a\equiv\text{const}$。

这个定理使零副特征的定义有合理基础。

定理6 设$P\in CL^m(X)$，其主符征$p_m(x,\ \xi)$取实值，$u\in\mathscr{D}'(X)$，且或P具适合，或$u\in\mathscr{E}'$。若J为$p_m(x,\xi)$的副特征的连通支，而不与$\mathrm{WF}(Pu)$相交，则或$J\subset\mathrm{WF}(u)$，或$J\cap\mathrm{WF}(u)=\varnothing$。换句话说，在$\mathrm{WF}(Pu)$的余集中，集$\mathrm{WF}(u)$关于沿Hamilton组

$$\frac{dx_j}{dt}=\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j},\ \frac{d\xi_j}{dt}=-\frac{\partial p_m}{\partial x_j},\ j=1,\cdots,n, \qquad (31)$$

的轨线$(x(t),\ \xi(t))$的移动是不变的。

在证明前，先举例说明，再证明一个引理。

例2 波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\triangle u=0$$

在R^{n+1}中不能有具孤立奇点或紧奇点集的解。

事实上，这里$m=2$，$p_2(x,\ \xi)=-\xi_0^2+|\xi|^2$。相应方程组(31)有解

$\xi_0 = \xi_j = \text{const.}$, $x_0 = -2\xi_0 t$, $x_j = 2\xi_j t$, $j = 1, \cdots, n$.
取解u使sing supp$u$含原点O，则存在点$(0, 0, \xi_0, \xi) \in \mathrm{WF}(u)$，$|\xi_0|^2 = |\xi|^2$，$\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$。据定理6知$(-2\xi_0 t, 2\xi t, \xi_0, \xi)$对所有的实$t$属$\mathrm{WF}(u)$，特别地，对一切实$t$有$(-2\xi_0 t, 2\xi t) \in$ sing supp$u$，故u无孤立奇点或紧奇点集。

引理5 设$u \in \mathscr{D}'(X)$，则条件$(x^0, \xi^0) \in \mathrm{WF}(u)$等价于：

(A) 存在$\varepsilon > 0$，使当$\lambda(x, \theta)$为定义于$\{|x - x^0| < \varepsilon, \theta \in R_N \setminus 0\}$的光滑实函数，关于$\theta$为正齐一次，且对某个$\theta_0 \neq 0$有$\lambda_x(x^0, \theta_0) = \xi_0$时，则对当$|x - x^0| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$为零的任一经典符征$a \in CS^0(\{|x - x^0| < \varepsilon\} \times R_\theta^N)$，存在$\theta_0$在$R_N \setminus 0$中的锥邻域$\Gamma$，使

$$|(u(x), a(x, \theta)e^{-i\lambda(x, \theta)})| \leqslant C_N |\theta|^{-N},$$
$$\theta \in \Gamma, \quad |\theta| \geqslant 1. \tag{32}$$

证 1) 证条件(A)成立。取$a(x) \in C_0^\infty(R^n)$，在点x^0的某邻域中$a \equiv 1$，当$|x - x^0| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$时$\psi \equiv 0$，并取$\lambda(x, \theta) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \theta_j$，故$N = n$，$\theta_0 = \xi^0$，于是$(u(x), a(x)e^{-i(x \cdot \theta)}) = \widehat{au}(\theta)$，而在$\xi^0$的某个锥邻域中急降。由此知$(x^0, \xi^0) \notin \mathrm{WF}(u)$。

2) 设$(x^0, \xi^0) \notin \mathrm{WF}(u)$.不失一般性，可认为$u \in \mathscr{E}'(X)$，取$\lambda$及$a$如($A$)中所述。用$\widehat{u}(\xi)$改写(32)的左边

$$\begin{aligned}&(u(x), a(x, \theta)e^{i\lambda(x, \theta)})\\ &= \iint \widehat{u}(\xi)e^{i(x \cdot \xi) - i\lambda}a(x, \theta)dx\, d\!\!\bar{}\,\xi.\end{aligned} \tag{33}$$

把(33)理解为振荡积分。选ξ^0的充分小锥邻域Γ，使$\widehat{u}(\xi)$在其中急降。由于$(x^0, \xi^0) \notin \mathrm{WF}(u)$，这是可能的。分(33)右边的积分为和$I_1 + I_2$，$I_1$对$\xi$的积分域为$\Gamma_1$，而$I_2$则对$\xi$沿余集

$\mathbf{R}_n \setminus \Gamma_1$积分。下面对$I_1$及$I_2$分别进行估计。

I_1）在I_1中对x分部积分，并利用公式

$$ {}^tLe^{-i\lambda}=e^{-i\lambda},\quad {}^tL=|\lambda_x|^{-2}\sum_{j=1}^{n} i\lambda_{xj}\frac{\partial}{\partial x_j}, $$

${}^tL$及L的系数关于θ是正齐-1次的。因$\lambda_x(x^0,\theta_0)=\xi^0\neq 0$，有$|\lambda_x(x,\theta)|\neq 0$，这里$|x-x^0|<\varepsilon$，$\theta\in\Gamma$，$\Gamma$是$\theta_0$的充分小锥邻域。于是

$$ I_1=\int\int_{\xi\in\Gamma_1} L^l(e^{i(x,\xi)}a(x,\theta)\hat{u}(\xi)e^{-i\lambda(x,\theta)}dxd\xi. $$

因

$$ |L^l(e^{i(x,\xi)}a(x,\theta)|\leqslant C_2(1+|\xi|)^l(1+|\theta|)^{-l}, $$
$$ \theta\in\Gamma,\ |\theta|\geqslant 1. $$

故由$\hat{u}(\xi)$在Γ_1中的急降性得

$$ |I_1|\leqslant C_2(1+|\theta|)^{-l},\ \theta\in\Gamma,\ |\theta|\geqslant 1. \tag{34} $$

I_2）为估计I_2，应对x把整个因子$e^{i(x,\xi)-i\lambda}$作分部积分。选点θ_0在$\mathbf{R}_n\setminus 0$中的锥邻域Γ充分小，可认为

$$ \xi-\lambda_x(x,\theta)\neq 0,\ \theta\in\Gamma,\ \xi\in\mathbf{R}_n\setminus\Gamma_1,\ |x-x^0|<\varepsilon, $$

故对这种(x,ξ,θ)有

$$ \mathrm{grad}_x((x,\xi)-\lambda)\neq 0. $$

这就能保证振荡积分的正规化。事实上，对每个$C>0$，有

$$ |\xi-\lambda_x(x,\theta)|\geqslant C(|\xi|+|\theta|), $$
$$ \theta\in\Gamma,\ \xi\in\mathbf{R}_n\setminus\Gamma,\ |x-x_0|<\varepsilon. $$

取

$$ {}^tL=-i|\xi-\lambda_x(x,\theta)|^{-2}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\lambda_{xj}(x,\theta))\frac{\partial}{\partial x}, $$

即有

$$ {}^{t}Le^{i(\langle x,\xi\rangle-\lambda)}=e^{i\langle x,\xi\rangle-i\lambda}, $$

故得

$$ I_2=\iint_{\xi\in R_n\setminus F_1}e^{i\langle x,\xi\rangle-i\lambda}[L^l a(x,\theta)]\hat{u}(\xi)dx d\xi. \quad (35) $$

因$u\in\mathscr{E}'$，而有估式

$$ |\hat{u}(\xi)|\leqslant C_1(1+|\xi|)^{N_1}, $$

C_1及N_1为某二正数，故对充分大的l，积分(35)绝对收敛，且当$\theta\in\Gamma$，$|x-x^0|<\varepsilon$时，可用$C_q(1+|\theta|)^{-q}$估计它，q为任意正数。这个估计与(34)结合，即完成引理的证明。

注5 由引理5的证明可看出，若点(x^0,ξ^0)及函数a，λ含某个参数，且所有条件关于此参数一致成立，则(32)中的C_l与参数无关。

定理6的证明 1）先考虑情形$P=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}$。设$Pu=f$，且$(x^0,\xi^0)\notin WF(f)$。算子$P$的符征$\sigma_P=\xi_n$所对应的过$(x^0,\xi^0)$的副特征取形$(x_1^0,\cdots,x_{n-1}^0,x_n^0+t,\xi^0)$，$t$是沿副特征的参数。设$J$是这个副特征的含点$(x^0,\xi^0)$而不与$WF(f)$相交的某连通支。今证明：或$J\subset WF(u)$，或$J\cap WF(u)=\varnothing$。

设已给定引理5中所述的$\lambda(x,\theta)$及$a(x,\theta)$。记

$$ \lambda_t(x,\theta)=\lambda(x',x_n-t,\theta),\quad a_t(x,\theta)=a(x',x_n-t,\theta), $$

$x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$，则$\operatorname{supp}a_t$邻近于点$(x_1^0,\cdots,x_{n-1}^0,x_n^0+t,\xi^0)$，且在此点附近，$\lambda_t$有定义。显然，任意选择$\lambda$及$a$，可认为$\lambda_t$及$a_t$为在点$(x_1^0,\cdots,x_{n-1}^0,x_n^0+t,\xi^0)$满足$(A)$的任意函数。因

$$ \frac{d}{dt}(u,a_te^{-i\lambda_t})=\left(u,\frac{\partial}{\partial t}(a_te^{-i\lambda_t})\right) $$

$$=\left(u,\left(-\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\left(a_t e^{-i\lambda_t}\right)\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial x_n},a_t e^{-i\lambda_t}\right)$$

$$=(if,a_t e^{-i\lambda_t})\equiv R(t,\theta), \tag{36}$$

故由条件$J\cap WF(f)=\varnothing$及注 4 知，对t一致有

$$|R(t,\theta)|\leqslant C_N(1+|\theta|)^{-N},\quad \theta\in\Gamma,\ |\theta|\geqslant 1, \tag{37}$$

其中Γ为θ_0的充分小锥邻域。由此得

$$|(u,a_{t_1}e^{-i\lambda_{t_1}})|-(u,a_{t_2}e^{-i\lambda_{t_2}})|$$

$$=\left|\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}(u,a_t e^{-i\lambda_t})dt\right|\leqslant|t_1-t_2|C_N(1+|\theta|)^{-N} \tag{38}$$

故若$(u,\ a_t e^{-i\lambda_t})$对某个$t$关于$\theta$在$\Gamma$中急降，则对任何固定的$t$也如此。这正是定理 6 所求结果。

2）再设P为任意的一阶经典ψDO，即$P\in CL^1$，但具实的主符征$p_1(x,\xi)$。先证(36)仍成立。为此应选择含参数τ的函数λ及a，使

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\tau}[ae^{-i\lambda}]-{}^tP[ae^{-i\lambda}]=O(\langle\theta\rangle^{-N}),$$

$$\langle\theta\rangle=\sqrt{1+|\theta|^2}\,. \tag{39}$$

对τ一致关于$\theta\in\Gamma$成立，其中N为任意正数，且当$\tau=0$时，在点(x^0,ξ^0)，条件(A)成立。

急降条件(39)引出λ的方程(**光程方程**)

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}-p_1(x,\lambda_x)=0. \tag{40}$$

对小的τ及任意给定的初值$\lambda|_{\tau=0}$存在解λ。重要的是：沿p_1的副特征$(x(\tau),\xi(\tau))$应有

$$\lambda_{x_j}(x(\tau),\theta_0,\tau)=-\xi_j(\tau),\ j=1,\cdots,n. \tag{41}$$

只要它们当$\tau=0$时成立；而这是我们须假定成立的。事实上，由于

$$\frac{\partial\lambda_{xj}}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}p_1=-\xi_j(\tau),\quad j=1,\cdots,n,$$

故上述结论成立。

由(39)还可对a的渐近展式的各齐次部分a_j引出方程(传输方程，Transport $eq.$)

$$\frac{\partial a_1}{\partial\tau}-p_1(x,D)a_1+q(x,D)a_1=0;$$

$$\frac{\partial a_0}{\partial\tau}-p_1(x,D)a_0+q(x,D)a_0+R_0=0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial a_{-N}}{\partial\tau}-p_1(x,D)a_{-N}+q(x,D)a_{-N}+R_{-N}=O(\langle\theta\rangle^{-N}).$$

这里q为零阶ψDO，与λ_x有关；而R_j则只与$a_1,a_0,\cdots,a_{-j+1}$有关。若给定初值$a_j|_{\tau=0}$，容易递推地求出a_j。但注意a_j的台$\operatorname{supp}a_j$沿$p_1(x,\xi)$的副特征迁移。

基于上述，以下的讨论对小的τ完全类似于算子$P=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}$的情形。可注意，限定于小的$\tau$，并不损害一般性，因定理6只须在局部意义下证明。

3）最后考虑任意的m阶经典ψDO。设Q为$1-m$阶椭圆型经典的适ψDO，具实的主符征$q(x,\xi)$。记$P_1=PQ$，则P_1为一阶经典ψDO，其主符征$p_1(x,\xi)=p_m(x,\xi)q(x,\xi)$。据推论4，在定理6中只须考虑零副特征。但由关系式

$$\left.\begin{aligned}(p_1)_\xi&=(p_m)_\xi q+p_m q_\xi=(p_m)_\xi q,\\(p_1)_x&=(p_m)_x q+p_m q_x=(p_m)_x q,\end{aligned}\right\}\ (\text{当}p_m=0)$$

故函数p_1及p_m的实型嵌部具相差一个齐次变换。应用推论 5，知定理 6 对 P 的结论可由对 P_1 的结论导出。定理 6 证毕。

本章主要参考文献

1. L.Hörmander, Acta Math., 127 (1971)79-183.

2. M.A.Шубин, *Псевдодифференциальные Операторы*, Наука, Москва, 1978, Гл.1.

进一步的参考文献

1. J.J. Duistermadt, L.Hörmander, Acta Math., 128(1972)183-269.

2. R.Beals, Duke Math.J., 42(1975)1-42.

3. L.Boutet de Monvel, *A Course on Pseudo-differential Operaters and their Applications*, *Duke Univ.*, Math.Series Ⅱ, 1976.

4. H.O.Cordes, *Elliptic Pseudo-differential Operators-An abstract theory*, *Lecture Notes in Math.*, *Spinger-Verlag*, *Berlin*, No.756, 1979.

5. H.Kumano-go, M. Nage, Funk Cial. Ekvac., 21 (1978)151-192.

6. M.Taylor, *Pseudo-differential Operators*, *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, No. 416, 1974; Ⅱ, Princeton Univ. Press.

7. F.Treves, *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*, 1.2. Plenum Press, New York, 1980.